



**Facultad
de
Ciencias**

Gravedad de Einstein-Cartan y Cosmología

Einstein-Cartan gravity and Cosmology

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al

GRADO EN FÍSICA

Autor: Diego Rivera López-Brea
Director: Airam Marcos Caballero / Diego Herranz Muñoz

Septiembre - 2020

“La soberbia tiene una hija, y es la ingratitud.”

El Quijote

A quienes dije adiós por esto.

Agradecimientos

A lo largo de estos años de aprendizaje, ha habido personas que han compartido distintos tramos del camino. En algunos casos, el pensamiento de compartir mi tiempo y mi esfuerzo con ellas me ha hecho seguir adelante. En otros, su compañía ha evitado que me quede atrás.

Gracias a Srei Lot, Pholika, Daneth y los demás niños y niñas de Chiro, por ser fuente de mi motivación. A mis padres y mis hermanos, por acompañarme en todo momento. A mis amigos cercanos.

A Lan, Tobias, Elkin, Marine, Mahaout, Clemence, Mimi, y todos con los que me cruce viajando y que se quedaron una parte de mi.

A todos los estudiantes que han compartido su esfuerzo con un alumno que no siempre ha sabido corresponderles. A Álvaro, a los Marcos, a Celia, a Rodri y a Andrés. A Toraya, María y Patricia. A Santiago y a Felipe. Al resto de personas que se han cruzado en mi camino universitario y me han tendido una mano en algún momento u otro.

A Mariela, por regalarme su apoyo cuando ya fallaba el mío.

Por último, me gustaría agradecerle a mi director, Airam, su inestimable ayuda y paciencia. Las largas charlas sobre las connotaciones de una teoría que al principio excedía notablemente mi conocimiento. Sin su ayuda este trabajo habría sido imposible.

Resumen

Se ha realizado una generalización de la Relatividad General, en la cual se levanta la restricción de nulidad sobre la torsión. Esto resulta en la introducción de una segunda ecuación de campo que, en analogía con la ecuación de campo obtenida en Relatividad General, liga un objeto geométrico con otro físico. Si en Relatividad General se tenía curvatura y energía-momento, ahora se le añade una segunda ecuación que liga torsión con espín. Esto se hace desde las coordenadas de la variedad y desde el espacio tangente, donde recibe el nombre de teleparalelismo. Una vez obtenidas las ecuaciones de campo, se calcula un nuevo tensor de Einstein que tenga en cuenta que la conexión ya no es simétrica, y utilizando la nueva ecuación de campo se expresa el mismo en función del espín. A partir de aquí, resolver dentro del marco cosmológico teniendo en cuenta el nuevo tensor de Einstein. La contribución de la torsión servirá para explicar dos problemas cosmológicos tradicionales, la planitud y el horizonte, sin necesidad de teorías inflacionarias.

Palabras clave: Relatividad General, gravedad, Einstein-Cartan, cosmología, teleparalelismo.

Abstract

A generalization of General Relativity has been made, in which the nullity restriction on torsion is lifted. This results in the introduction of a second field equation that, in analogy with the field equation obtained in General Relativity, links a geometric object with a physical one. If in General Relativity curvature and energy-momentum were linked by a field equation, now a second equation is added that links torsion with spin. This is done from the coordinates of the manifold and from the tangent space, where the theory is known as teleparallelism. Once the field equations are obtained, a new Einstein tensor is calculated that takes into account that the connection is no longer symmetric, and using the new field equation it is expressed as a function of spin. From here, solve within the cosmological framework taking into account the new Einstein tensor. The contribution of torsion will serve to explain two traditional cosmological problems, flatness and horizon, without the need for inflationary theories.

Keywords: General Relativity, gravity, Einstein-Cartan, cosmology, teleparallelism.

Contenidos

1. Introducción	1
1.1. Gravedad modificada: Einstein-Cartan. Motivación.	1
1.2. Organización del trabajo	2
2. Variedades Diferenciables	5
2.1. Del Principio de Equivalencia y el uso de Variedades diferenciables en Relatividad General	5
2.2. Variedades diferenciables	7
2.2.1. Variedades	7
2.2.2. Espacios tangente y cotangente	7
2.2.3. Cambios generales de coordenadas y tensores	8
2.2.4. Métrica	10
2.2.5. Conexión afín, derivada covariante y transporte paralelo	11
2.2.6. Curvatura y torsión	13
3. Relatividad General	15
3.1. Relatividad General	15
3.1.1. Conexión de Levi-Civita	15
3.1.2. Propiedades de la conexión de Levi-Civita	16
3.1.3. Principio de mínima acción	17
3.1.4. Acción de Einstein-Hilbert y Acción de Materia	18
3.1.5. Formalismos variacionales	21
3.1.6. Ecuación para la métrica: Ecuaciones de campo	22
3.1.7. Ecuación para la conexión	22
4. Gravedad de Einstein-Cartan	23
4.1. Gravedad de Einstein-Cartan	23
4.1.1. Materia y geometría: Masa y espín	23

4.1.2.	Notación	24
4.1.3.	Contorsión	24
4.1.4.	Ecuación de la métrica	26
4.1.5.	Ecuación de la conexión	26
4.1.6.	Tensor de curvatura para una conexión métrica arbitraria.	28
4.1.7.	Tensor de Einstein para una conexión métrica arbitraria.	28
4.1.8.	Tensor de energía-momento de Belifante-Rosenfeld	29
5.	Cosmología	31
5.1.	Cosmología en Gravedad de Einstein-Cartan	31
5.1.1.	Métrica de Robertson-Walker	32
5.1.2.	Tensor de energía-momento para un fluido de espín	34
5.1.3.	Ecuaciones de Friedman con Torsión	35
5.1.4.	Parámetros de densidad	37
5.1.5.	Problemas que motivan la teoría inflacionaria	37
5.1.6.	Problema de la planitud	38
5.1.7.	Problema del horizonte	38
6.	Teleparallelismo	41
6.1.	Formalismo Vielbein	42
6.1.1.	Conexión de espín y curvatura de espín	43
6.1.2.	Postulado de los Vielbein	44
6.1.3.	El postulado de los Vielbein visto como un cambio general de coordenadas	44
6.2.	Teleparallelismo	45
6.2.1.	Formalismo de Palatini desde el espacio tangente	45
6.2.2.	Ecuación para los Vielbein	45
6.2.3.	Ecuación para la conexión de espín	46
7.	Conclusiones	47
7.1.	Conclusiones	47
7.2.	Trabajo futuro	50
A.	Ecuación para la métrica	51
B.	Ecuación para la conexión	53

<i>CONTENIDOS</i>	IX
C. Ecuación para los Vielbeins	55
D. Ecuación para la conexión de espín	57
Bibliografía	61

Capítulo 1

Introducción

1.1 Gravedad modificada: Einstein-Cartan. Motivación.

En la descripción que la física moderna plantea para las interacciones fundamentales, existen dos aproximaciones conceptuales esencialmente diferentes. Por un lado, la gravedad, encuentra su descripción más acertada en el marco de la relatividad general, donde su efecto es formulado en términos de la geometría del propio espacio-tiempo. Por otro lado, las interacciones electromagnética, débil y fuerte, se describen en el marco de la teoría cuántica de campos, donde cada una de ellas se corresponde con términos en el lagrangiano del modelo estándar, resultantes de la invarianza que presenta el mismo bajo la acción de distintos grupos gauge.

Por ser acercamientos conceptuales diferentes, coexisten en el sentido de que la teoría cuántica de campos se desarrolla en un espacio con una geometría, la plana, es decir, de curvatura nula, conocido como espacio de Minkowsky.

En esta tesitura, las razones para realizar modificaciones a la Relatividad General cobran sentido. El objetivo natural de la física teórica fundamental es el de alcanzar una teoría unificada, capaz de explicar con exactitud cada una de las interacciones elementales. Por tanto, la actual brecha entre la teoría gravitatoria y la cuántica de campos sería motivación suficiente como para realizar modificaciones en la forma que tenemos de describir nuestro universo.

Ahora bien, en la realización de estas modificaciones, se pueden intentar expresar todas las interacciones desde el punto de vista de cada uno de los acercamientos. Es decir, se puede intentar expresar la gravedad como teoría cuántica de campos; o bien el resto de interacciones en términos geométricos. De esta forma, se obtendría una teoría general capaz de explicar todas las interacciones bajo el mismo marco, y se solventaría la anteriormente mencionada brecha conceptual. Por supuesto, también existe la posibilidad de que ninguno de los dos planteamientos sea el adecuado para una teoría unificada; o que la gravedad y el resto de interacciones fundamentales sean cosas esencialmente diferentes y no se puedan describir dentro del mismo marco conceptual.

El objetivo de este trabajo es, sin embargo, más modesto. Se va a generalizar la teoría de la Relatividad General, anulando una de sus restricciones, pero sin salirse del marco geométrico. Este planteamiento va a permitir asociar un parámetro propio de la materia, y de la teoría

cuántica de campos, el espín, con un parámetro propio de la descripción geométrica de la gravedad, la torsión.

La gravedad de Einstein-Cartan, con su versión desde el espacio tangente, conocida como teleparalelismo, forma parte de las teorías de gravedad modificada, donde también se encuentran las teorías $f(R)$ y las deformaciones del teleparalelismo $f(T)$.^[1]

El lector podría preguntarse en consecuencia cuál es la motivación de esta teoría de gravedad modificada, si es incapaz de solventar la dicotomía existente entre ambos modelos. La correspondiente respuesta viene dada por el hecho de que, adicionalmente, existen razones de origen experimental, mediciones que el modelo cosmológico actual no puede o sabe predecir. Aunque se estudian soluciones dentro del marco relativista general clásico, hay quienes apuntan que el problema está en las propias raíces de la teoría, y que una revisión a la teoría gravitatoria original es necesaria.

Este trabajo no se centra en aportar nuevos cálculos o cambios conceptuales en la teoría. Más modestamente, se reproducen los cálculos que la fundamentan en la medida de lo posible, y se intenta hacer una síntesis de la información disponible que sea auto-explicativa. Con ello se pretende que el lector no familiarizado con esta rama de la física pueda leer este trabajo y entender en que consiste la gravedad de Einstein-Cartan.

1.2 Organización del trabajo

El trabajo está estructurado en cinco capítulos principales, además de la presente introducción y las conclusiones finales.

El **Capítulo 2** se dedica a introducir los elementos matemáticos básicos para establecer una teoría geométrica del *espaciotiempo*. Se habla de variedades diferenciables, métrica, conexión, curvatura y torsión entre otros.

El **Capítulo 3** está dedicado a la Relatividad General, pues se ha estimado que su comprensión facilita enormemente la comprensión de lo que se hace en una teoría como en la Einstein-Cartan. Se deriva una ecuación que liga un elemento geométrico, la curvatura, con un elemento físico, la presencia de materia.

En el **Capítulo 4** se introduce la gravedad de Einstein-Cartan. Se toma como punto de partida el momento en el que esta teoría se separa de la Relatividad General: en la condición de torsión nula. Después, se derivan las ecuaciones de campo, obteniendo una ecuación adicional a la de Relatividad General que ligará justificadamente un elemento geométrico, la conexión, con un elemento físico, el espín. Se intenta obtener razonadamente un tensor de Einstein que acople curvatura y torsión utilizando las dos ecuaciones de campo obtenidas. Por la extensión del trabajo, los cálculos correspondientes al final de esta sección, cuando se calcula el análogo al tensor de Belifante-Rosenfeld, no se han podido reproducir y se han obtenido de bibliografía.

En el **Capítulo 5** se introduce el concepto de Cosmología como marco aproximativo para resolver las ecuaciones de Campo, tanto en el caso de Relatividad General, como en el caso de gravedad de Einstein-Cartan. Se deduce la métrica resultante de estas aproximaciones pero la obtención de las Ecuaciones de Friedman y la expresión de la expresión del fluido de espín se toman de la bibliografía.

En el **Capítulo 6** se repite el proceso realizado en el Capítulo 3 pero desde el espacio tangente, reproduciendo así el intento que hizo en su día Einstein de unificación, conocido como teleparalelismo. Se introduce la matemática de las tétradas o Vielbein, y se justifica su uso planteando la ecuación para un campo material particular en espacios curvos: el campo de Dirac.

Por último, en el **Capítulo 7**, conclusiones, se sintetiza lo aprendido en este trabajo, y se plantean líneas de trabajo futuro.

Capítulo 2

Variedades Diferenciables

2.1 Del Principio de Equivalencia y el uso de Variedades diferenciales en Relatividad General

Es normal en este tipo de trabajos empezar por introducir una carga notable de geometría diferencial, lo cual tiene sentido, dado que es en este lenguaje en el que se formula la Relatividad General. A partir de esta formulación, se llega a resultados profundos y que sin una casuística como la introducida serían notablemente difíciles de obtener. A veces, la herramienta matemática proporciona resultados teóricos, a los que se puede dar una interpretación física, que de otro modo, y tan solo en base a la intuición, serían imposibles de alcanzar. Sin embargo, resulta interesante que, en los grandes saltos conceptuales de la física, se parta originalmente de una idea, un principio físico según el que se debe comportar nuestro universo, y luego se busque la herramienta matemática adecuada, la cual nos permitirá hacer avances teóricos importantes.

Este es el caso de Einstein y su visión de la Relatividad General. Dos años después de la formulación de la Relatividad Especial, en 1905, Einstein se dio cuenta de la incompatibilidad entre la misma y la teoría gravitacional de Newton. Existen varias formas de ver esto. Según Newton, la aceleración de una partícula en un campo gravitatorio está relacionada con el potencial de la fuerza gravitatoria de la siguiente manera:

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\vec{\nabla} \Phi \quad (2.1)$$

El potencial, a su vez, está relacionado con la densidad de materia, ρ_m , a través de la *ecuación de Poisson*:

$$\Delta \Phi = 4\pi G_N \rho_M \quad (2.2)$$

donde G_N es la constante de Newton. Hay varias formas de ver como esta descripción de la gravedad no es compatible con la relatividad especial, al menos para el caso de campos gravitatorios dinámicos. Matemáticamente, ni 2,1 ni 2,2, transforman bien bajo una transformación de Lorentz, luego la gravedad newtoniana no es invariante bajo el grupo de Lorentz. Solo hay que fijarse en que 2,1 depende de la aceleración, y esta a su vez del tiempo. Para Newton solo existía un tiempo absoluto, pero según la Relatividad Especial el tiempo varía con cada observador. Se podría solventar esto derivando con respecto al tiempo propio e intentando convertir 2,1 en una ecuación covariante, pero aún haciendo esto, 2,2 presentaría un problema adicional, el laplaciano $\Delta \Phi$ no es un operador invariante (necesitaríamos el

d'lambertiano $\square\Phi$). De una forma un tanto más física, podemos argumentar que como en 2,2 el potencial gravitatorio Φ está relacionado con la distribución de materia ρ_M en el universo, si un observador cambia la distribución de materia en algún punto de este, el cambio en el potencial gravitatorio se nota inmediatamente en todos los puntos del universo. Esto sugiere una velocidad de interacción superior a la de la luz, lo cual es incompatible con la relatividad especial.

De manera que Einstein se enfrenta al problema de encontrar una teoría gravitacional compatible con la relatividad especial y cuyo caso estático coincida con la de Newton. Es aquí cuando cae en la cuenta de la idea clave de la Relatividad General: el Principio de Equivalencia. Para ilustrarlo, se suele utilizar el ejemplo de los ascensores.

Se imagina un observador en el interior de un ascensor. Este se pregunta cuál es el movimiento del mismo. Para ello, se quita un zapato y lo sostiene en su mano. Lo suelta. El observador deduce que si el zapato se mueve en alguna dirección, el ascensor estará siendo acelerado en la misma por acción de alguna fuerza. Sin embargo, si no se mueve, el ascensor constituye un sistema inercial. Clásicamente, esto último se traduce en que, o bien el ascensor está quieto, o bien se mueve a una velocidad constante. No obstante, el gran acierto de Einstein consiste en darse cuenta precisamente de que hay un tercer caso de sistema inercial: que el ascensor esté en caída libre por efecto de la gravedad. La gravedad se aplica sobre todo el espacio y actúa con una intensidad independiente a la masa de los objetos, por lo que, si el observador se quita el zapato, también se quedará estático. Sin embargo, si el observador sospecha de esta posibilidad, siempre podrá quitarse dos zapatos, ponerlos en dos esquinas del ascensor, y puesto que la gravedad apunta al centro de la Tierra, si espera lo suficiente, los zapatos acabarán encontrándose en el centro del ascensor, con lo cual el sistema no podría ser interpretado como inercial. Por tanto, este tercer caso de sistema inercial solo es válido para secciones del espacio y el tiempo muy pequeñas, es decir, solo es válido *localmente*.

Luego, localmente, los observadores no son capaces de apreciar los efectos de ninguna fuerza, pero globalmente sí. A Einstein le llevo un tiempo dar una interpretación a esto. Para entenderla, el ejemplo más comúnmente utilizado en este caso es el de las hormigas. Imagínense dos hormigas viviendo en la superficie de una esfera muy grande, ignorantes de la geometría de la misma. Cada una de ellas interpreta el espacio que le rodea como plano. Situadas en distintas posiciones del ecuador, se ponen de acuerdo en empezar a moverse paralelamente en la misma dirección. Escojan la dirección que escojan, a excepción de que una persiga a la otra, debido a la geometría de la esfera siempre van a acabar encontrándose. Sorprendidas, porque para ellas el movimiento se había originado paralelamente en el plano, interpretan que existe una fuerza que las ha unido. De manera análoga, un observador en caída libre, localmente interpreta que se encuentra en un sistema inercial, moviéndose en línea recta a velocidad constante. Y en cierto modo lo hace, solo que a través de un espacio curvo, por lo que globalmente interpreta estar sometido a alguna fuerza. A este tipo de fuerzas, se les denomina fuerzas ficticias.

Si se considera el movimiento de una partícula por efecto de la gravedad de algún cuerpo, se tendrá el equivalente a un movimiento rectilíneo, pero en un espacio que resulta curvo por considerar a la gravedad como una fuerza ficticia. Se consigue así una relación entre materia y geometría que se suele describir en los siguientes términos: “la materia le dice al espacio como curvarse, y el espacio le dice a la materia como moverse”.

La herramienta matemática que se adapta a esta visión del espacio, globalmente curvo y

localmente plano, es la *variedad diferenciable*, y toda la casuística de *geometría diferencial* asociada a ella.

2.2 Variedades diferenciables

Es normal en un curso de Relatividad General, introducir conceptos de *geometría diferencial* como n-formas, derivada exterior y derivada de Lie como motivación a la introducción de la derivada covariante, productos wedge, desviación de geodésicas etc. Es también normal, en un curso de Variedades Diferenciables, introducir todos los conceptos que se van a abordar a continuación de una forma más abstracta y detallada, sin apenas recurrir a la notación coordenada (de índices) que se va a utilizar a lo largo del presente trabajo.

Aquí, por la extensión del trabajo, y por coherencia contextual, se omitirán algunos de los resultados básicos a los cuales se llega tanto en cursos de Relatividad General, como en cursos de Variedades Diferenciables. No obstante, se buscará la completitud del trabajo.

2.2.1. Variedades

Una *variedad diferenciable* \mathcal{M} de dimensión D es un espacio topológico Hausdorff que cumple el II axioma de numerabilidad y que localmente tiene la estructura de \mathbb{R}^D .

Por su estructura de \mathbb{R}^D local se tiene que para cada punto $p \in \mathcal{M}$ se puede encontrar un entorno abierto U tal que $p \in U$ y un homeomorfismo $\varphi : U \rightarrow A$ entre U y un abierto $A \subset \mathbb{R}^D$. Se le llama *carta alrededor de p* a cada par (U, φ) .

Se les llama *funciones coordenadas* asociadas a la carta, a las aplicaciones $x^\mu : U \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $\varphi(q) = (x^1(q), x^2(q), \dots, x^D(q))$, con $q \in U$.

Se le llama *atlas* a un conjunto de cartas cuyos abiertos recubren toda la variedad.

Sean (U, φ) y (V, ψ) dos cartas tales que $p \in U$ y $p \in V$. El cambio de carta es una función entre espacios euclídeos de la forma:

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^D \rightarrow \psi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^D \quad (2.3)$$

Se le llama *estructura diferenciable* a un atlas cuyos cambios de carta son funciones C^∞ .

Se le llama *variedad diferenciable* a una variedad dotada de una estructura diferenciable.

2.2.2. Espacios tangente y cotangente

Se consideran una variedad diferenciable \mathcal{M} de dimensión D , un punto p en la misma y una carta $(U, \varphi = (x^\mu))$ alrededor de p . Se dice que $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ es una *función diferenciable sobre \mathcal{M}* si $f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable.

Es posible extender el concepto de derivada, presente en \mathbb{R}^D , a la variedad a través de las cartas:

$$\frac{\partial f}{\partial x^\mu}(p) := \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial z^\mu}(\varphi(p)) \quad (2.4)$$

donde z^μ son las coordenadas elegidas en \mathbb{R}^D .

En cada punto p de la variedad se puede construir, considerando los operadores

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\mu} : C^\infty(\mathcal{M}) &\rightarrow C^\infty(\mathcal{M}) \\ f &\mapsto \frac{\partial f}{\partial x^\mu}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

uno por coordenada, un espacio vectorial con base $\frac{\partial}{\partial x^\mu}|_p$:

$$T_p\mathcal{M} := \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^\mu}|_p : \mu = 1, \dots, D \right\} \quad (2.6)$$

A este espacio se le denomina *espacio tangente* en p , y es un espacio isomorfo a \mathbb{R}^D .

Aunque se puede definir de manera más formal, en este trabajo basta con interpretar al *fibrado tangente* como la unión de los espacios tangentes de la variedad:

$$T\mathcal{M} := \bigcup_{p \in \mathcal{M}} T_p\mathcal{M} \quad (2.7)$$

Se tiene entonces que un vector tangente a la variedad es un elemento del fibrado tangente. Se escribe localmente como:

$$\mathbf{V}(p) = V^\mu(p) \partial_\mu|_p \quad (2.8)$$

Se puede ahora definir, a partir de una relación de dualidad con los vectores, el concepto de *formas lineales* o *1-formas* en la variedad. Si se denota a la base dual como $\{dx^\mu\}$, entonces la relación de dualidad en cada punto p de la variedad se puede expresar como $dx^\mu(\partial_\nu) = \delta^\mu_\nu$. Es sencillo definir entonces el espacio y el fibrado cotangente como:

$$T_p^*\mathcal{M} := \text{span} \left\{ dx^\mu|_p : \mu = 1, \dots, D \right\}, \quad T^*\mathcal{M} := \bigcup_{p \in \mathcal{M}} T_p^*\mathcal{M} \quad (2.9)$$

Entonces una 1-forma es un elemento del fibrado cotangente que se escribe como:

$$\omega(p) = \omega_\mu(p) dx^\mu|_p \quad (2.10)$$

2.2.3. Cambios generales de coordenadas y tensores

Una aplicación entre variedades F es diferenciable si su imagen en \mathbb{R}^D a través de las cartas es diferenciable. Si F es además un homeomorfismo y su inversa es diferenciable, se dice que F es un *difeomorfismo*. El conjunto de difeomorfismos de una variedad \mathcal{M} sobre sí misma se conoce como $\text{Diff}(\mathcal{M})$ y junto con la operación de composición de aplicaciones diferenciales, adquiere la estructura de un grupo de Lie de dimensión infinita. Su álgebra de Lie esta generada por los cambios generales de coordenadas infinitesimales.

Especialmente interesante es el hecho de que los elementos de $\text{Diff}(\mathcal{M})$, se pueden interpretar de forma *pasiva* (que no mueven puntos), con lo que serían cambios generales de coordenadas $x^\mu \rightarrow y^\alpha$ (CGC).

No es casualidad que antes de la noción de tensor se hayan introducido los espacios tangente y cotangente, puesto que esta se va a basar en que los CGC afectan de distinta forma a los elementos de cada uno.

Localmente un vector se expresa como 2.8. La forma en la que transforma un vector con un CGC $x^\mu \rightarrow y^\alpha$, recibe el nombre de *contravarianza*:

$$V^\alpha = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} V^\mu \quad . \text{ La base transforma como: } \quad \partial_\alpha = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \partial_\mu \quad (2.11)$$

Análogamente, una 1-forma localmente se escribe como 2.10 y a la manera en la que cambia ante un CGC se la denomina *covarianza*:

$$\omega_\alpha = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \omega_\mu \quad , \text{ y su base: } \quad dy^\alpha = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu \quad (2.12)$$

Se pueden construir campos vectoriales y covectoriales asociando a cada punto sobre la variedad vectores y 1-formas. Adicionalmente, utilizando la operación del producto tensorial y haciendo combinaciones lineales entre los elementos de las bases tangente y cotangente, pueden construirse fibrados tensoriales $T^{(r,s)}\mathcal{M}$. Con esto ya podemos definir tensores formalmente:

Un *tensor de tipo (r,s)* (r -contravariante s -covariante) es una aplicación $\mathbf{T} : \mathcal{M} \rightarrow T^{(r,s)}\mathcal{M}$, que se expresa localmente como $\mathbf{T} = T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_r}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_s} \partial_{\mu_1} \otimes \ldots \otimes \partial_{\mu_r} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \ldots \otimes dx^{\nu_s}$ y transforma ante CGC como:

$$T^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_s} = \frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}} \ldots \frac{\partial y^{\alpha_r}}{\partial x^{\mu_r}} \frac{\partial y^{\nu_1}}{\partial x^{\beta_1}} \ldots \frac{\partial y^{\nu_s}}{\partial x^{\beta_s}} T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_r}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_s} \quad (2.13)$$

La noción de tensor generaliza la noción de vectores, formas y escalares (estos últimos invariantes ante CGC):

$$T^{(0,1)}\mathcal{M} = T\mathcal{M}, \quad T^{(1,0)}\mathcal{M} = T^*\mathcal{M}, \quad T^{(0,0)}\mathcal{M} = C^\infty(\mathcal{M}) \quad (2.14)$$

Hasta ahora, se han introducido las variedades de forma topológica, y a través de las cartas, ha sido posible introducir en la teoría algunas de las nociones del análisis en \mathbb{R}^D sobre ellas. Pero con lo introducido hasta ahora, no se puede aún hablar de *geometría* en las variedades. Para poder hacer esto, vamos a necesitar dos elementos fundamentales en la teoría: la métrica y la conexión. El primero generaliza la noción de producto escalar en espacios euclídeos a la variedad, mientras que el segundo solventa la ambigüedad en el transporte paralelo para la comparación de vectores en espacios curvos, o mejor dicho, define un transporte paralelo sobre la variedad.

2.2.4. Métrica

La métrica es un tensor 2-covariante, forma bilineal, simétrico y no degenerado sobre una variedad. Como se ha mencionado anteriormente, es una de las herramientas que permiten la introducción de una geometría en la variedad. De alguna forma, generaliza el concepto de producto escalar en espacios euclídeos, definiéndose para la base como las correspondientes componentes de la métrica en ella:

$$g_{\mu\nu} = \mathbf{g}(\partial_\mu, \partial_\nu) \equiv \partial_\mu \cdot \partial_\nu \quad (2.15)$$

Esta interpretación de la métrica como producto escalar, permite decir que la métrica induce una estructura de espacio normado con norma:

$$\|\mathbf{V}\| := \sqrt{|V_\mu V^\mu|} = \sqrt{|g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu|} \quad (2.16)$$

Sin embargo, la propiedad más útil de la métrica, quizás no sea su naturaleza como generalización del producto escalar. Por el *teorema de Riesz-Freché*, la métrica permite establecer un isomorfismo natural (independiente de la base), entre el espacio tangente $T_p\mathcal{M}$ y el cotangente $T_p^*\mathcal{M}$. En matemáticas este isomorfismo se expresa con las aplicaciones *bemol* y *sostenido*, pero en física, donde se trabaja siempre en base coordenada, se reduce que la métrica permite “subir y bajar índices”. De esta manera cada vector V^μ tiene una forma asociada unívocamente $V_\nu = g_{\mu\nu} V^\mu$, y viceversa.

Generalizando, cualquier elemento de una fibra tensorial $T_p^{(r,s)}$ de orden (número de índices) $r+s$, esta relacionado con elementos de otras fibras de igual orden. Por ejemplo, si se toma la igualdad $T_{\mu\nu\rho} = g_{\lambda\mu} T^\lambda_{\nu\rho}$, $T_{\mu\nu\rho}$ y $T^\lambda_{\nu\rho}$ son distintos, viven en distintos espacios, pero están relacionados de forma unívoca a través de la métrica. Se elegirá uno u otro por conveniencia en los cálculos.

De esta forma, se puede escribir un tensor $g^{\mu\nu}$ tal que $g^{\mu\nu} g_{\mu\rho} = \delta^\nu_\rho$ que generaliza la noción de producto escalar a 1-formas. Por su relación con la métrica a $g^{\mu\nu}$ se le conoce como *métrica inversa*.

Al par (\mathcal{M}, g) , es decir a una variedad diferenciable equipada con una métrica, se le denomina *variedad riemanniana* si la métrica es definida positiva, y *variedad pseudoriemanniana* si la métrica no es definida positiva.

En general, a lo largo de la teoría se pueden encontrar diferentes criterios de signo y notación para algunos de los conceptos que se van a introducir. Por ejemplo, en este trabajo se considera que los vectores *temporales* son aquellos en los que $g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu > 0$, los *espaciales* en los que $g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu < 0$, y *luminosos* aquellos correspondientes a norma nula. En cada espacio tangente a la variedad, se puede tomar una base ortonormal compuesta por vectores temporales y espaciales, siendo el *índice* el número de vectores temporales. Si el índice de la variedad es 1, la variedad se denomina *variedad lorentziana*.

Se define al *espaciotiempo* como una variedad diferenciable lorentziana, que además es conexa y orientable temporalmente, $\mathbb{L}^D = \mathbb{R}^{1,D-1}$. Por tanto, en el caso del espaciotiempo, el convenio de signos para los vectores temporales y espaciales se traduce en que se elige el convenio $(+---)$ en vez del $(-+++)$, también harto utilizado.

2.2.5. Conexión afín, derivada covariante y transporte paralelo

Introduciendo la métrica, se ha podido pasar de hablar de variedades de forma topológica, a poder hablar de una cierta *geometría* en las mismas. Sin embargo, aún quedan cabos por atar para poder generalizar las nociones geométricas propias de los espacios euclídeos a estos espacios.

Existen varias maneras de introducir el siguiente concepto necesario en la teoría: la *conexión*. Para un lector familiarizado con el Álgebra Lineal, las nociones de espacio afín, espacio vectorial, espacio director, entre otras, le serán familiares. Imagínese dos vectores en \mathbb{R}^2 interpretado como espacio afín, cada uno de ellos con origen en distintos puntos. La comparación de estos dos vectores se realiza en el espacio vectorial al cual se ha asociado el espacio afín, donde ambos vectores comparten origen. Si \mathbb{R}^2 es interpretado como variedad diferencial, el proceso por el cual se comparaban estos dos vectores adquiere cierta complejidad. En primer lugar, cada uno de estos puntos tendrá un espacio tangente asociado, por lo que en principio no se puede hablar de un espacio vectorial asociado en él que los vectores compartan origen de forma inmediata. Para realizar esta comparación entre ambos vectores, se intenta recrear lo que sucede en el espacio afín, y se mueven los dos vectores al origen de \mathbb{R}^2 . La forma natural de hacerlo es dotando al espacio de coordenadas cartesianas, y trasladando ambos vectores *paralelamente* a los ejes hasta que ambos estén en el origen. Es importante darse cuenta sin embargo de que en este proceso, tal y como se ha descrito, hay dos ambigüedades. En primer lugar, transportar *paralelamente* es un término que en el plano descrito en coordenadas cartesianas se asocia de forma natural a mover el vector a lo largo de las rectas paralelas a cada eje, de forma que el ángulo del vector con respecto a la recta en la que se transporta no varíe. Este movimiento de los vectores en coordenadas cartesianas es sencillo de describir, sin embargo, el mismo movimiento en coordenadas polares resulta bastante más complicado. La noción de *paralelo* natural a estas coordenadas es distinta a la de cartesianas. La conexión es un elemento que va a permitir fijar una noción de paralelismo de forma inequívoca. Dicho de otra forma, va a “conectar” la geometría local en torno a un punto, con la geometría local en torno a otro punto. En segundo lugar, incluso eligiendo la noción de paralelismo natural en cartesianas, el camino por el cual se puede elegir transportar a los vectores no es único. En este caso, por estar en \mathbb{R}^2 , se escoja el camino que se escoja, los vectores terminan en la misma posición y “postura” el uno con respecto al otro y con respecto a la base cartesiana. Se verá que esto es efecto de un parámetro definido a partir de la conexión y que recibirá el nombre de curvatura.

En realidad, el concepto de conexión matemática es algo más abstracto. Arriba, lo que en realidad se maneja es la *conexión afín*, que permite especificar un transporte paralelo en la variedad. Pero, ¿qué es formalmente la conexión afín, y como se relaciona con el transporte paralelo?

Para la explicación formal, se parte de la necesidad de buscar una pseudo-derivada parcial de un vector que varíe como un tensor ante CGC. Y es que la derivada parcial de un vector $\partial_\mu V^\nu$ no transforma como un tensor (1,1) (solo transforma correctamente, como vector, la derivada parcial de un escalar). De hecho, la actual idea de derivada, implica que para derivar un tensor general en la dirección de x^ρ se tiene:

$$\lim_{\delta x^\rho \rightarrow 0} \frac{T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_s}(q) - T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_s}(p)}{\delta x^\rho},$$

ecuación sin ningún tipo de sentido, pues la propia definición lleva implícita la comparación entre dos tensores viviendo en dos espacios diferentes ($T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_r}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_s}$ se evalúa en dos puntos distintos). No hay una forma natural de hacer esto, por tanto se necesita una *conexión*. Extendiendo lo que les pasa a vectores y formas, se puede obtener como se comparan los tensores de cualquier orden.

Sea V^μ un campo vectorial evaluado en dos puntos p y q de la variedad. La idea es coger uno de los vectores, por ejemplo $V^\mu(p) \in T_p\mathcal{M}$ y enviarlo a $T_q\mathcal{M}$, representando al resultado como $V_P^\mu(q)$:

$$\nabla_\nu V^\mu(q) = \lim_{\delta x^\nu \rightarrow 0} \frac{V^\mu(q) - V_P^\mu(q)}{\delta x^\nu}, \quad (2.17)$$

que está bien definido. La conexión aparece en la definición de V_P^μ , que recibirá el nombre de *transporte paralelo (infinitesimal)* de $V^\mu(p)$ al punto q :

$$V_P^\mu(q) = V^\mu(p) - \Gamma_{\lambda\rho}^\mu \delta x^\lambda V^\rho(p) \quad (2.18)$$

Con esto, la *derivada covariante* de un vector se define como:

$$\nabla_\nu V^\mu = \partial_\nu V^\mu + \Gamma_{\nu\rho}^\mu V^\rho \quad (2.19)$$

Nótese que aunque el conjunto de la derivada covariante sí transforme como un tensor, la *conexión afín* por sí misma no lo hace.

Análogamente, la derivada covariante para una 1-forma y un escalar es

$$\nabla_\nu V_\mu = \partial_\nu V_\mu - \Gamma_{\nu\mu}^\rho V_\rho, \quad \nabla_\nu f = \partial_\nu f. \quad (2.20)$$

y extendida a cualquier tensor

$$\begin{aligned} \nabla_\nu T^{\mu_1\ldots\mu_r}_{\rho_1\ldots\rho_s} = & \partial_\nu T^{\mu_1\ldots\mu_r}_{\rho_1\ldots\rho_s} + \Gamma_{\nu\sigma}^{\mu_1} T^{\sigma\ldots\mu_r}_{\rho_1\ldots\rho_s} + \ldots + \Gamma_{\nu\sigma}^{\mu_r} T^{\mu_1\ldots\sigma}_{\rho_1\ldots\rho_s} \\ & - \Gamma_{\nu\rho_1}^\sigma T^{\mu_1\ldots\mu_r}_{\sigma\ldots\rho_s} - \ldots - \Gamma_{\nu\rho_s}^\sigma T^{\mu_1\ldots\mu_r}_{\rho_1\ldots\sigma} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Es común en bibliografía utilizar la notación “,” para derivada covariante, y “;” para derivada común. De esta forma la expresión 2.21 resultaría ser:

$$\begin{aligned} T^{\mu_1\ldots\mu_r}_{\rho_1\ldots\rho_s;\nu} = & T^{\mu_1\ldots\mu_r}_{\rho_1\ldots\rho_s,\nu} + \Gamma_{\nu\sigma}^{\mu_1} T^{\sigma\ldots\mu_r}_{\rho_1\ldots\rho_s} \\ & + \ldots + \Gamma_{\nu\sigma}^{\mu_r} T^{\mu_1\ldots\sigma}_{\rho_1\ldots\rho_s} - \Gamma_{\nu\rho_1}^\sigma T^{\mu_1\ldots\mu_r}_{\sigma\ldots\rho_s} - \ldots - \Gamma_{\nu\rho_s}^\sigma T^{\mu_1\ldots\mu_r}_{\rho_1\ldots\sigma} \end{aligned}$$

Es importante señalar que esta operación se puede hacer en cualquier dirección, no necesariamente en la de las coordenadas. Sea $\mathbf{V} = V^\nu \partial_\nu$, entonces

$$\nabla_{\mathbf{V}} A^\mu = V^\nu \nabla_\nu A^\mu. \quad (2.22)$$

Ahora ya se está en una buena posición para describir formalmente el *transporte paralelo*, mencionado en el ejemplo al comienzo de esta sección, para cualquier variedad.

Sea $u^\mu = dx^\mu/d\sigma$ un campo vectorial que da la velocidad de una curva $\gamma(\sigma)$ en cada punto. La derivada covariante de un vector a lo largo de la curva se define como,

$$u^\nu \nabla_\nu A^\mu(\sigma) = 0,$$

que representa el *transporte paralelo* a lo largo de ella. Por tanto, como el transporte paralelo depende de la derivada covariante, y esta su vez de la conexión afín, entonces cada conexión define una noción de paralelismo distinta.

2.2.6. Curvatura y torsión

Antes se mencionó que en el transporte paralelo de los vectores en \mathbb{R}^2 , existía una segunda ambigüedad que dependía de los caminos elegidos, pero que dada las características del espacio, no repercutía en el resultado final del transporte. Sin embargo, si en vez de \mathbb{R}^2 , se considera la esfera \mathbb{S}^2 , la elección de caminos va a resultar en dos situaciones distintas. Esto se puede apreciar, en la Figura 2.1.

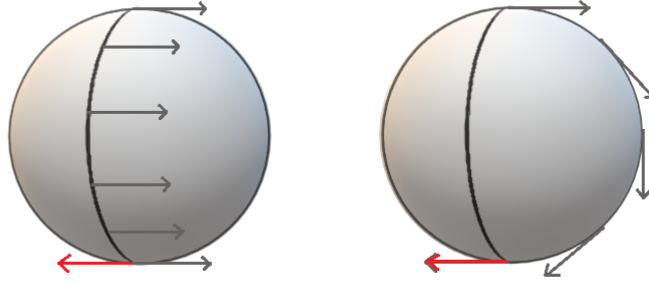


Figura 2.1: Ambigüedad en espacios curvos

Sin entrar en detalles, la esfera es una variedad diferenciable (es “suave” y se puede definir un plano tangente de base las derivadas direccionales en cada punto). Se pueden entonces considerar un vector viviendo en el plano tangente al “polo Norte” de la esfera, y otro viviendo en el plano tangente al “polo Sur”. Si se quieren comparar ambos vectores, se deben transportar hasta que ambos compartan el mismo origen. Sin embargo, al contrario que en el plano, eligiendo un transporte paralelo, el resultado es distinto en función del camino elegido. En 2.1 se escoge un transporte paralelo y se transporta el vector desde polo Norte hasta el polo Sur a través de dos meridianos distintos. Como se puede apreciar el resultado es, obviamente, distinto.

Para el lector, observador externo a la esfera, esta aparece inmersa en un espacio euclídeo superior, el tridimensional donde es imaginada. Externamente es fácil determinar que la esfera se diferencia del plano en que este último es, precisamente “plano”, mientras que la esfera es “claramente curva”. En última instancia, este hecho hace que exista la mencionada ambigüedad en el transporte paralelo. Sin embargo, esta idea vaga y extrínseca de curvatura necesita formalizarse y pasar a tener una naturaleza intrínseca a la variedad, de manera que a esta última no sea necesario inmergírla en un espacio de dimensión superior. Pero la idea cualitativa a definir formalmente tiene que ver con la reflexión del mencionado ejemplo. Se dice que *una variedad es curva si el transporte paralelo de un vector a través de una curva cerrada resulta en un vector diferente al volver en el punto de salida*.

Formalmente, se considera el transporte paralelo de un vector alrededor de un paralelogramo infinitesimal cuyos lados consisten en los vectores dx^μ y dx^ν , que representan desplazamientos infinitesimales en las direcciones x^μ y x^ν respectivamente. En particular, se considera el vector V^λ . Se traslada primero a lo largo de dx^μ y luego a lo largo de dx^ν , y luego se traslada al revés, primero a lo largo de dx^ν y luego a lo largo de dx^μ . Es decir, se calcula el conmutador de las derivadas covariantes $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]$. Para un tensor general $H^{\rho_1 \dots \rho_r}_{\lambda_1 \dots \lambda_s}$ se tiene

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] H^{\rho_1 \dots \rho_r}_{\lambda_1 \dots \lambda_s} = R_{\mu\nu\sigma}{}^{\rho_1} H^{\sigma \dots \rho_r}_{\lambda_1 \dots \lambda_s} + \dots + R_{\mu\nu\sigma}{}^{\rho_r} H^{\rho_1 \dots \sigma}_{\lambda_1 \dots \lambda_s} - R_{\mu\nu\lambda_1}{}^{\sigma} H^{\rho_1 \dots \rho_r}_{\sigma \dots \lambda_s} - \dots - R_{\mu\nu\lambda_s}{}^{\sigma} H^{\rho_1 \dots \rho_r}_{\lambda_1 \dots \sigma} - T^\sigma{}_{\mu\nu} \nabla_\sigma H^{\rho_1 \dots \rho_r}_{\lambda_1 \dots \lambda_s} \quad (2.23)$$

donde se han introducido dos conceptos:

- El tensor de *torsión*, que representa la antisimetría de la conexión en sus índices inferiores.

$$T^\sigma{}_{\mu\nu} := \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma{}_{\nu\mu}. \quad (2.24)$$

Es importante destacar que, aunque las conexiones no sean tensores, sí que lo es la diferencia entre ellas. La interpretación gráfica que se le suele dar a la torsión es que “abre” los cuadriláteros infinitesimales.

Vale la pena mencionar algo sobre el ejemplo de la Figura 2.1. Se ha mostrado un transporte paralelo a través de dos meridianos de la esfera que a primera vista parece bastante natural. Esta naturalidad es precisamente la que da el hecho de que el transporte paralelo representado, se corresponda con una conexión de torsión nula.

- El tensor de *curvatura de Riemann*. Un tensor de tipo (1,3) definido como

$$R_{\mu\nu\lambda}{}^\rho := \partial_\mu \Gamma^\rho{}_{\nu\lambda} - \partial_\nu \Gamma^\rho{}_{\mu\lambda} + \Gamma^\rho{}_{\mu\sigma} \Gamma^\sigma{}_{\nu\lambda} - \Gamma^\rho{}_{\nu\sigma} \Gamma^\sigma{}_{\mu\lambda} \quad (2.25)$$

que contiene toda la información de la curvatura de la variedad. Es sencillo observar la antisimetría en sus dos primeros índices e importante darse cuenta de que si el espacio es plano, $R_{\mu\nu\lambda}{}^\rho = 0$ sin depender de las coordenadas escogidas (puesto que $\{0\}$ es invariante en el espacio vectorial ante cambios de base).

Es importante notar que una vez definidos tensores con simetrías y antisimetrías en algunos de sus índices, el orden en el que se presentan los índices cobra importancia. Por ejemplo, si se considera el tensor de torsión $T^\sigma{}_{\mu\nu}$ definido en 2.24, los dos índices a la derecha son los que presentan la antisimetría. La ambigüedad viene cuando se suben y bajan índices. Por ejemplo, si se presenta el tensor de torsión $T_\mu{}^\nu{}_\sigma$, en base a la antisimetría del tensor $T^\sigma{}_{\mu\nu}$, se podría interpretar erróneamente que los dos índices inferiores de $T_\mu{}^\nu{}_\sigma$ son los antisimétricos, o que lo importante son los nombres de los índices y que los dos índices antisimétricos son μ y ν , pero la antisimetría, de existir, está en los dos índices de la derecha (ν y σ) en este caso. Esta antisimetría, además, solo se puede asegurar si ambos índices están en el mismo espacio, arriba o abajo. En el caso de que uno esté arriba y otro abajo el tensor no siempre será antisimétrico.

A partir del tensor de Riemann se pueden obtener 3 tensores independientes y 2-covariantes.

$$R^{(1)}{}_{\nu\lambda} := R_{\mu\nu\lambda}{}^\mu, \quad R^{(2)}{}_{\mu\nu} := g_{\alpha\nu} g^{\lambda\beta} R_{\mu\beta\lambda}{}^\alpha = R_{\mu\beta}{}^\beta{}_\nu, \quad R^{(3)}{}_{\mu\nu} := R_{\mu\nu\lambda}{}^\lambda \quad (2.26)$$

Estos tensores puede ser nulos incluso si la variedad no es plana.

$$R^{(1)}{}_{\nu\lambda} = \partial_\mu \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} - \partial_\nu \Gamma^\mu{}_{\mu\lambda} + \Gamma^\mu{}_{\mu\sigma} \Gamma^\sigma{}_{\nu\lambda} - \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} \Gamma^\sigma{}_{\mu\lambda} \quad (2.27)$$

$$R^{(2)}{}_{\mu\nu} = g_{\alpha\nu} g^{\lambda\beta} (\partial_\mu \Gamma^\alpha{}_{\beta\lambda} - \partial_\beta \Gamma^\alpha{}_{\mu\lambda} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\sigma} \Gamma^\sigma{}_{\beta\lambda} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\sigma} \Gamma^\sigma{}_{\mu\lambda}) \quad (2.28)$$

$$R^{(3)}{}_{\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\lambda{}_{\nu\lambda} - \partial_\nu \Gamma^\lambda{}_{\mu\lambda} \quad (\text{Antisimétrico}) \quad (2.29)$$

$R^{(1)}{}_{\mu\lambda}$ se conoce como el *tensor de Ricci* y se escribirá $R_{\mu\lambda}$ por comodidad. Las contracciones escalares de estos tensores son:

$$g^{\mu\lambda} R^{(1)}{}_{\nu\lambda} = -g^{\mu\nu} R^{(2)}{}_{\mu\nu}, \quad R^{(3)} = 0, \quad (2.30)$$

de entre las cuales la única no trivial e independiente, R , se conoce como *escalar de Ricci* o *escalar de curvatura*. Estas relaciones no son triviales y son solamente posibles por la compatibilidad de la métrica.

$$R = g^{\nu\lambda} R^{(1)}{}_{\nu\lambda} = g^{\nu\lambda} (\partial_\mu \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} - \partial_\nu \Gamma^\mu{}_{\mu\lambda} + \Gamma^\mu{}_{\mu\sigma} \Gamma^\sigma{}_{\nu\lambda} - \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} \Gamma^\sigma{}_{\mu\lambda}) \quad (2.31)$$

Capítulo 3

Relatividad General

3.1 Relatividad General

Una vez introducida la geometría diferencial básica se procede a plantear una descripción del *espaciotiempo* con ella. La primera descripción que se va a abordar en este trabajo es la de la Relatividad General, que ayudará a comprender la gravedad de Einstein-Cartan que se introduce en el capítulo siguiente 4.

3.1.1. Conexión de Levi-Civita

Por la última sección del capítulo anterior, 2, queda explicado que es el conjunto de la variedad diferenciable, con una métrica y una conexión afín, el que permite hacer geometría en la variedad. Se considera, pues, una variedad lorentziana afínmente conectada (\mathcal{M}, g, Γ) . Ahora bien, en su concepción del universo, Einstein decidió asumir las condiciones sobre la conexión más usuales en la geometría diferencial de su tiempo:

1. *Compatibilidad de la métrica:* El módulo y los ángulos no cambian al transportar de forma paralela los vectores, de manera que:

$$\nabla_\lambda g^{\mu\nu} = 0$$

Se dice que una conexión es una *conexión métrica* si su derivada covariante cumple la anterior condición. A una variedad (teoría), cuya conexión es compatible con la métrica se la llama *variedad (teoría) de Einstein-Cartan*.

2. *Torsión nula.*

$$T^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} = 0$$

Es este el punto donde el presente trabajo se desvía de la Relatividad General. A priori, parece no haber una razón física justificada para anular la torsión.

Matemáticamente, la unión entre la compatibilidad de la métrica y la nulidad en la torsión, dan como resultado una conexión simétrica dependiente de la métrica, conocida como

conexión de Levi-Civita, la cuál tiene una serie de propiedades que simplifican enormemente los cálculos. Es probablemente esta simplicidad la que motiva la elección de variedades lorentzianas afínmente conectadas que respeten estas dos condiciones. Dicho de otra forma, el espaciotiempo, en Relatividad General, es una variedad diferenciable lorentziana afínmente conectada por la conexión de Levi-Civita.

Pero, ¿cuál es la expresión analítica para esta conexión, completamente determinada por la métrica?

En primer lugar se expresan las distintas derivadas covariantes que se pueden calcular de la métrica (respetando la condición de compatibilidad).

$$\begin{aligned} 0 &= g_{\mu\nu;\lambda} = g_{\mu\nu,\lambda} - \Gamma^\alpha_{\lambda\mu}g_{\alpha\nu} - \Gamma^\alpha_{\lambda\nu}g_{\alpha\mu} \\ 0 &= g_{\mu\lambda;\nu} = g_{\mu\lambda,\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\mu}g_{\alpha\lambda} - \Gamma^\alpha_{\nu\lambda}g_{\alpha\mu} \\ 0 &= g_{\nu\lambda;\mu} = g_{\nu\lambda,\mu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}g_{\alpha\lambda} - \Gamma^\alpha_{\mu\lambda}g_{\alpha\nu} \end{aligned}$$

Ahora la idea es combinar estas expresiones de manera que sea posible despejar uno de los términos de la conexión. Es sencillo ver que eligiendo una torsión nula, la combinación necesaria es la suma de dos de ellas y la resta de la otra.

$$0 = g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\mu\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\mu} - \Gamma^\alpha_{\lambda\mu}g_{\alpha\nu} - \Gamma^\alpha_{\lambda\nu}g_{\alpha\mu} - \Gamma^\alpha_{\nu\mu}g_{\alpha\lambda} - \Gamma^\alpha_{\nu\lambda}g_{\alpha\mu} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}g_{\alpha\lambda} + \Gamma^\alpha_{\mu\lambda}g_{\alpha\nu}$$

Teniendo en cuenta que, $T^\sigma_{\mu\nu} = \Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma_{\nu\mu}$, se tiene:

$$\begin{aligned} 0 &= g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\mu\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\mu} - \Gamma^\alpha_{\lambda\mu}g_{\alpha\nu} - \Gamma^\alpha_{\lambda\nu}g_{\alpha\mu} - \Gamma^\alpha_{\nu\mu}g_{\alpha\lambda} - (T^\alpha_{\nu\lambda} + \Gamma^\alpha_{\lambda\nu})g_{\alpha\mu} \\ &\quad + (T^\alpha_{\mu\nu} + \Gamma^\alpha_{\nu\mu})g_{\alpha\lambda} + (T^\alpha_{\mu\lambda} + \Gamma^\alpha_{\lambda\mu})g_{\alpha\nu} \\ &= g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\mu\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\mu} + T^\alpha_{\mu\lambda}g_{\alpha\nu} + T^\alpha_{\mu\nu}g_{\alpha\lambda} + (T^\alpha_{\lambda\nu} - 2\Gamma^\alpha_{\lambda\nu})g_{\alpha\mu} \end{aligned}$$

Por la segunda condición para la conexión de Levi-Civita, la torsión es nula:

$$0 = g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\mu\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\mu} - 2\Gamma^\alpha_{\lambda\nu}g_{\alpha\mu}$$

Y despejando el término para la conexión, se obtiene la fórmula analítica para la conexión de Levi-Civita:

$$\Gamma^\alpha_{\lambda\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\mu}(g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\mu\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\mu})$$

Para la conexión de Levi-Civita, los $\Gamma^\alpha_{\lambda\nu}$ reciben también el nombre de *símbolos de Christoffel*.

3.1.2. Propiedades de la conexión de Levi-Civita

En primer lugar, la compatibilidad de la métrica implica que el producto escalar de dos vectores trasportados paralelamente a lo largo de una curva es invariante a lo largo de la misma.

$$u^\mu \nabla_\mu (V_\nu W^\nu) = g_{\lambda\nu} u^\mu \nabla_\mu (V^\lambda W^\nu) = g_{\lambda\nu} u^\mu \nabla_\mu V^\lambda W^\nu + g_{\lambda\nu} V^\lambda u^\mu \nabla_\mu W^\nu = 0 + 0 = 0,$$

Adicionalmente, la compatibilidad de la métrica implica que la derivada covariante conmuta con subir y bajar índices:

$$g_{\mu\nu}\nabla_\rho S^{\mu\nu} = \nabla_\rho(g_{\mu\nu}S^{\mu\nu}) = \nabla_\rho S^\mu{}_\mu$$

Esto no es cierto para derivadas covariantes con conexiones no compatibles con la métrica. Pero quizás las propiedades más importantes de la conexión de Levi-Civita sean las simetrías que induce en el tensor de curvatura y sus contracciones:

1. Para cualquier conexión métrica se tiene que $R_{\mu\nu\rho\lambda} = -R_{\nu\mu\rho\lambda}$, pero con Levi-Civita, adicionalmente se tiene:

$$R_{\mu\nu\rho\lambda} = -R_{\mu\nu\lambda\rho}$$

2. Con Levi-Civita el tensor de Ricci es la única contracción independiente del tensor de Riemann y además $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$.

3.1.3. Principio de mínima acción

Con el Principio de Equivalencia, se justificaba al inicio de este capítulo el uso de las variedades diferenciables en Relatividad General. Es decir, se describe un principio físico, filosófico si se quiere, con el formalismo matemático adecuado. Sin embargo, por si solo, este principio no es suficiente para la derivación de toda una teoría. Queda clara cual es la casuística matemática donde se deben desarrollar las ecuaciones que definan las leyes e interacciones físicas, pero aún es necesaria la derivación de dichas ecuaciones. Dicho de otra forma, *el principio de Equivalencia justifica la descripción del espaciotiempo como (\mathcal{M}, g, Γ) , una variedad diferenciable lorentziana de conexión métrica (la nulidad en la torsión es más debatible), pero no especifica de qué variedad (\mathcal{M}, g, Γ) se trata*. Es decir, para definir esta variedad, se debieran calcular las estructuras geométricas que la describen: la métrica g y la conexión Γ .

La obtención de g y Γ se fundamenta en otro principio físico elemental: *el Principio de Mínima Acción*. La forma de aprovecharlo será la misma que en Mecánica Analítica, la obtención de un Lagrangiano de alguna forma dependiente de las variables a calcular y la implementación de las ecuaciones de Euler-Lagrange para cada una de ellas.

En general y formalmente, la *acción* es un funcional que se construye a partir de la *densidad lagrangiana* \mathcal{L} del sistema, que depende de los campos físicos (conexiones, tensores, espinores,...) χ presentes en el mismo:

$$\mathcal{S}[\chi, \partial\chi] = \int \mathcal{L}(\chi, \partial\chi) \sqrt{|g|} d^D x \quad (3.1)$$

siendo $\sqrt{|g|} d^D x$ el elemento de volumen invariante ($g = \det \mathbf{g}$). Es importante señalar que a lo sumo hay primeras derivadas en los campos. Imponiendo el principio de mínima acción $\delta S = 0$, y efectuando una variación de los campos (tal que $\delta\chi = 0$ en el borde del dominio):

$$0 = \int \delta \left(\mathcal{L} \sqrt{|g|} \right) d^D x$$

$$\begin{aligned}
&= \int \left[\frac{\partial (\mathcal{L}\sqrt{|g|})}{\partial \chi} \delta \chi + \frac{\partial (\mathcal{L}\sqrt{|g|})}{\partial (\partial_\mu \chi)} \delta (\partial_\mu \chi) \right] d^D x \\
&= \int \left[\frac{\partial (\mathcal{L}\sqrt{|g|})}{\partial \chi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial (\mathcal{L}\sqrt{|g|})}{\partial (\partial_\mu \chi)} \right) \right] \delta \chi d^D x
\end{aligned}$$

donde en la última igualdad se ha integrado por partes y se ha utilizado el teorema de la divergencia. Como esto es cierto para todo $\delta \chi$, se obtienen las *ecuaciones de Euler-Lagrange*:

$$\frac{\delta S}{\delta \chi} = \frac{\partial (\mathcal{L}\sqrt{|g|})}{\partial \chi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial (\mathcal{L}\sqrt{|g|})}{\partial (\partial_\mu \chi)} \right) = 0 \quad (3.2)$$

3.1.4. Acción de Einstein-Hilbert y Acción de Materia

Para cada campo χ independiente en el lagrangiano hay una ecuación Euler-Lagrange. Pero la pregunta natural que surge de este razonamiento es, ¿cuál es el lagrangiano de mi sistema y como se relaciona con la métrica y la conexión? ¿Dependerá de algún campo de materia, que se llamará χ por comodidad? ¿Que expresión tiene $\mathcal{L}(\chi, g, \Gamma)$?

La idea es encontrar una acción que dependa de dos acciones de distinta naturaleza: por un lado una acción que describa a la gravedad, y por otro lado otra acción que describa la distribución de materia:

$$S = S_{grav} + S_{mat}$$

La derivación de las mismas a partir de un conjunto de ecuaciones de movimiento no es trivial ni sistemática. Tanto para la acción gravitatoria como para la acción material, tiene sentido suponer que las densidades lagrangianas dependan, por lo menos, de la métrica g y de la conexión Γ , y quizás de sus derivadas, aunque no necesariamente. De hecho, los lagrangianos para los distintos campos de materia, campos escalares, de Majorana, de Dirac, etc, en espacios planos son conocidos, de alguna forma deberán generalizarse a espacios curvos. En cualquier caso, la dependencia de las respectivas acciones con respecto a las distintas variables, estará acotada por lo que se conoce como *el Principio de Mínimo Acoplo*.

Principio de Mínimo Acoplo

El Principio de Mínimo Acoplo es un principio filosófico que viene a decir que la generalización más sencilla es la correcta. Aunque en este trabajo se utilizará para justificar la elección de ambas acciones, gravitatoria y material, se suele utilizar para justificar la generalización de las acciones materiales en espacios planos a espacios curvos. Por eso, las dos formulaciones clásicas del principio son:

- *Formulación física*: En un espacio curvo, los campos no-gravitacionales se acoplan solamente a la métrica y a la conexión, no de sus derivadas. En el caso de la relatividad general, al trabajar con Levi-Civita, se acoplan solo a la métrica.

- *Formulación práctica:* Las leyes de la física en espacios curvos son las mismas que las de relatividad especial, donde se sustituyen las derivadas parciales ∂_μ por covariantes ∇_μ y la métrica de Minkowski por una métrica general $g_{\mu\nu}$.

Vale la pena reflexionar sobre la formulación física del Principio de Mínimo Acoplo. La dependencia de los campos no-gravitatorios con la métrica está justificada por la naturaleza dinámica de al menos un término en el lagrangiano, que dependerá necesariamente de un término cuadrático en la velocidad. Este término cuadrático es, en realidad, un producto escalar, puesto que la velocidad es una derivada y por tanto, tiene carácter vectorial (el lagrangiano es un escalar). En el espacio de la variedad, el objeto geométrico que define un producto escalar es la métrica, por tanto su presencia es necesaria. Por supuesto, dada la relación entre métrica y conexión en relatividad general, no es necesario justificar la dependencia con la conexión, puesto que no la hay. Sin embargo, es precisamente la línea de este trabajo mostrar como la presencia de campos de materia de espín no homogéneo justifica la dependencia de la acción correspondiente con la conexión.

El principio de mínimo acople es potente, pero no infalible. Hay casos en los cuales no funciona, pero en todos los casos a tratar en este trabajo es válido. Teniéndolo en cuenta, se procede a buscar las acciones.

Acción Gravitatoria

En primer lugar se busca una posible acción gravitatoria, es decir que no tenga en cuenta la presencia de materia (no dependerá de posibles campos de materia χ). Se supondrá que tenga la forma:

$$S_{grav} = \int \mathcal{L}_{grav}(g, \Gamma) d^4V$$

donde \mathcal{L}_{grav} es el lagrangiano gravitatorio y d^4V es elemento de volumen. El elemento de volumen es el más sencillo: en un sistema de coordenadas de Minkowsky local y^i , el elemento de volumen es el cubo diferencial 4-dimensional $d^4V = dy^0 dy^1 dy^2 dy^3$. Si existe un determinante de Jacobiano positivo J^i_μ que transforme esto en un sistema de coordenadas general x^μ , se tiene:

$$d^4V = dy^0 dy^1 dy^2 dy^3 = (\det J^i_\mu) dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = (\det J^i_\mu) d^4x$$

Sin embargo, resulta que el tensor métrico en un sistema de coordenadas general es:

$$g_{\mu\nu} = J^i_\mu J^j_\nu \eta_{ij}$$

Definiendo $g = \det g_{\mu\nu}$, se tiene que $|g| = (\det J)^2$ y $\det J = \sqrt{|g|} d^4x$. Por tanto, el elemento de volumen es

$$d^4V = \sqrt{|g|} d^4x$$

Por su parte, para encontrar el lagrangiano, se busca una función escalar que dependa de la métrica, la conexión, y, en este caso con el lagrangiano gravitatorio, sus derivadas. El escalar más simple que cumple estas condiciones es el escalar de Ricci R . Es aquí donde cobra importancia el Principio de Mínimo Acoplo. El escalar de Ricci no es el único escalar que se puede elegir, por ejemplo, se podría haber elegido un escalar dependiente de R^2 , pero sí que es el más sencillo. Por tanto, se elige un lagrangiano tal que $\mathcal{L} \propto R$. A la

acción correspondiente se la conoce por el nombre de *acción de Einstein-Hilbert*, (puesto que fue Hilbert quien primero dio con ella, 5 días antes de que el propio Einstein enviara sus ecuaciones de campo):

$$S_{EH} = \frac{1}{2\kappa} \int R \sqrt{|g|} d^4x$$

Acción material

Una acción material genérica, para una variedad sin restricciones sobre la conexión, dependerá de los campos de materia χ correspondientes, de la métrica g y de la conexión Γ , pudiéndose expresar como:

$$S_{mat} = \int \mathcal{L}_{mat}(\chi, g, \Gamma) \sqrt{|g|} d^4x$$

donde se ha utilizado que el término de volumen para esta acción es el mismo que para la acción gravitatoria.

Es en este caso donde verdaderamente cobra sentido el Principio de Mínimo Acoplo. Aplicando la formulación física del principio a la incógnita de una acción de materia que no esté necesariamente enmarcada en un *espaciotiempo* de torsión nula, se pueden anular términos en las ecuaciones de Euler:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L}_{mat}(\chi, g, \Gamma))}{\partial g^{\gamma\rho}} + \partial_\eta \left(\frac{(\sqrt{|g|}\mathcal{L}_{mat}(\chi, g, \Gamma))}{\partial(\partial_\eta g^{\gamma\rho})} \right) &= -\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L}_{mat}(\chi, g, \Gamma))}{\partial g^{\gamma\rho}} \\ -\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L}_{mat}(\chi, g, \Gamma))}{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma} + \partial_\eta \left(\frac{(\sqrt{|g|}\mathcal{L}_{mat}(\chi, g, \Gamma))}{\partial(\partial_\eta \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma)} \right) &= -\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L}_{mat}(\chi, g, \Gamma))}{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma} \end{aligned}$$

Obviamente, en Relatividad General, se puede escribir directamente $\mathcal{L}_{mat}(\chi, g, \Gamma) = \mathcal{L}_{mat}(\chi, g)$ y se tiene que $\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L}_{mat}(\chi, g))}{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma} = 0$.

Acción general del sistema

En resumen, el Principio de Mínimo Acoplo define a la acción gravitatoria en términos del escalar de Ricci y reduce las ecuaciones de Euler correspondientes a la acción material al asegurar que esta no depende de las derivadas de la métrica o de la conexión.

Por tanto, la acción general del sistema en el marco de Relatividad General es:

$$S = S_{EH} + S_{mat} = \frac{1}{2\kappa} \int R(g) \sqrt{|g|} d^4x + \int \mathcal{L}_{mat}(\chi, g) \sqrt{|g|} d^4x$$

y la única diferencia que se tendrá en el siguiente capítulo, cuando se levante la condición de simetría sobre la conexión, será que el lagrangiano de materia también podrá depender de la conexión:

$$S = S_{EH} + S_{mat} = \frac{1}{2\kappa} \int R(g, \Gamma) \sqrt{|g|} d^4x + \int \mathcal{L}_{mat}(\chi, g, \Gamma) \sqrt{|g|} d^4x$$

3.1.5. Formalismos variacionales

Existen en general distintos formalismos variacionales que se puede utilizar para la derivación de las ecuaciones de campo a partir de la acción recientemente calculada. En este trabajo, se utilizarán dos:

- *Formalismo métrico* (o de segundo orden): se asume la conexión simétrica. El único campo a calcular será la métrica, puesto que la conexión de Levi-Civita depende de la misma (no son campos independientes). Se asume por tanto que la acción es:

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int R(g) \sqrt{|g|} d^4x + \int \mathcal{L}_{mat}(\chi, g) \sqrt{|g|} d^4x$$

donde en R la conexión, al ser la de Levi-Civita, también se puede expresar en función de la conexión. De esta acción se derivan las siguientes ecuaciones de campo:

- *Ecuación para la métrica g* : se obtiene la ecuación de campo característica de la Relatividad General, ligando un objeto geométrico, la curvatura, con un tensor que dé cuenta de la distribución de energía-materia. La incógnita de esta ecuación de campo es, precisamente, la métrica que se quiere calcular para definir la variedad que describe el espaciotiempo.
- *Ecuación para los campos de materia χ* : No se calcularán en este trabajo, pero dependen exclusivamente de la acción de materia S_{mat} .
- *Formalismo de Palatini* (o de primer orden): se consideran una métrica y una conexión independientes. Aunque este formalismo será especialmente útil en el siguiente capítulo, cuando se deriven las ecuaciones de campo en gravedad de Einstein-Cartan (donde la conexión y la métrica no estarán ligadas por la condición de torsión nula), resulta que para Relatividad General también tiene bastante utilidad, como se verá en el siguiente apartado. De forma general, se puede considerar una acción:

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int R(g, \Gamma) \sqrt{|g|} d^4x + \int \mathcal{L}_{mat}(\chi, g) \sqrt{|g|} d^4x$$

Puesto que ahora hay un campo adicional con respecto al que derivar, la conexión, se obtendrá una nueva ecuación de campo. De manera que las ecuaciones de campo a obtener son:

- Las ecuaciones obtenidas con el formalismo métrico.
- *Ecuación para la conexión*: Las ecuaciones de Euler-Lagrange con respecto a la métrica daban como resultado una ecuación que ligaba un aspecto de la geometría del espacio con uno físico, dícese curvatura con distribución de materia. Resolver esta ecuación (en realidad ecuaciones diferenciales acopladas) permitía obtener la métrica. De forma análoga, al realizar las ecuaciones de Euler-Lagrange con respecto a la conexión se obtiene una ecuación de campo que liga otro aspecto geométrico con otro físico, y su resolución dará como resultado la obtención de la conexión. En este caso, el objeto geométrico será la torsión, que quedará ligado a las inhomogeneidades en la distribución de espín en la materia. Se verá como, en Relatividad General, al considerar un lagrangiano de materia independiente de la conexión, se recupera la conexión de Levi-Civita.

En principio, estos dos formalismos se pueden utilizar para acciones gravitatorias que no sean las de Einstein-Hilbert, pero no se considerarán en este trabajo.

3.1.6. Ecuación para la métrica: Ecuaciones de campo

Puesto que este capítulo está dedicado a Relatividad General, en principio se podría empezar aplicando el formalismo métrico para la obtención de las ecuaciones de Einstein. En la práctica, se debe recurrir al formalismo de Palatini para obtener la expresión final para las ecuaciones de Einstein propias de Relatividad General (detalles en el apéndice A):

$$R_{\gamma\rho} - \frac{1}{2}Rg_{\gamma\rho} = \kappa\tau_{\gamma\rho} \quad (3.3)$$

donde se ha definido como *tensor de energía-momento* a:

$$\tau_{\gamma\rho} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L}_{mat}(\chi, g))}{\partial g^{\gamma\rho}}$$

Se suele definir un tensor para la parte izquierda de la ecuación, *el tensor de Einstein* $G_{\gamma\rho}$:

$$G_{\gamma\rho} = R_{\gamma\rho} - \frac{1}{2}Rg_{\gamma\rho}$$

de forma que las ecuaciones de Einstein quedan:

$$G_{\gamma\rho} = \kappa\tau_{\gamma\rho}$$

3.1.7. Ecuación para la conexión

Puesto que al utilizar el formalismo de Palatini la conexión resulta ser independiente de la métrica, es necesario variar la acción con respecto variaciones en la conexión para completar las ecuaciones de campo.

Aplicando el principio de Mínima Acción (detalles en el apéndice B) se obtiene:

$$0 = g^{\mu\beta}\delta_{\alpha}^{\gamma}T^{\nu}_{\mu\nu} + g^{\mu\beta}T^{\alpha}_{\gamma\mu} + g^{\alpha\beta}T^{\nu}_{\nu\gamma} \quad (3.4)$$

La ecuación B.2 será de especial utilidad en el siguiente capítulo, donde no se asumirá la simetría de la conexión. Sin embargo, en este capítulo, el lagrangiano material depende exclusivamente de la métrica luego impone la condición de que

$$\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L}_{mat}(\chi, g))}{\partial\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}} = 0$$

y como

$$g^{\mu\beta}\delta_{\alpha}^{\gamma}T^{\nu}_{\mu\nu} + g^{\mu\beta}T^{\alpha}_{\gamma\mu} + g^{\alpha\beta}T^{\nu}_{\nu\gamma} = -\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L}_{mat}(\chi, g))}{\partial\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}} = 0$$

se tiene que la torsión T tiene que ser nula, recuperando así que la conexión es la de Levi-Civita. De esta forma se demuestra que la conexión de relatividad general es la conexión de Levi-Civita.

Capítulo 4

Gravedad de Einstein-Cartan

4.1 Gravedad de Einstein-Cartan

En este capítulo se rebobina la teoría introducida en el capítulo anterior hasta el momento en el que se introduce la segunda condición de la conexión de Levi-Civita: la que estipula que la torsión es nula. De hecho, en aquella sección se define como una *teoría o variedad de Einstein-Cartan* a aquella teoría o variedad cuya conexión cumple la condición métrica. Luego, lo que se va a hacer en este capítulo es una generalización de la Relatividad General, donde en vez de tomar una conexión simétrica, se toma una conexión métrica arbitraria.

Pero antes de empezar con las implicaciones matemáticas de considerar una torsión no nula, conviene reflexionar sobre la motivación física que condiciona la introducción de este nuevo parámetro. Al introducir el Principio de Equivalencia en el capítulo anterior, se mencionó que a menudo se describe la relación entre materia y geometría en los siguientes términos: “la materia le dice al espacio como curvarse, y el espacio le dice a la materia como moverse”. Como se ha visto, en Relatividad General esto es (casi) cierto, pues la materia se acopla únicamente a la curvatura. Sin embargo, pudiera ser incluso más preciso, pues no son todos los aspectos de la materia los que se acoplan a la curvatura, sino que es la energía (en realidad es energía o momento dependiendo del observador, la energía no un invariante), a través del tensor de energía-momento, la que lo hace. Es decir, se podría corregir la frase, y para mayor precisión decir “la energía de la materia le dice al espacio como curvarse, y el espacio le dice a la energía de la materia como moverse”. Ahora bien, en la Introducción, se ha mencionado el deseo de unificar la Teoría Cuántica de Campos con la Relatividad General, por lo tanto es conveniente hablar de materia en los términos que mejor la describen: los de la teoría de campos.

4.1.1. Materia y geometría: Masa y espín

La materia macroscópica está formada por partículas elementales, que al menos localmente responden a la teoría cuántica de campos y a la relatividad especial. Como consecuencia,

cada partícula elemental se puede clasificar en términos de las representaciones irreducibles y unitarias del grupo de Poincaré, y pueden ser etiquetadas con masa m y momento angular intrínseco (espín) s . La masa está relacionada con la parte traslacional del grupo de Poincaré, y el espín con la parte rotacional. Distribuyendo masa-energía y espín a lo largo del espacio-tiempo se consiguen las nociones de campo teóricas de un tensor de energía-momento, y un tensor de momento angular de espín, de materia. Un defecto altamente conocido de la Relatividad General es su incapacidad para acoplar el espín y el momento angular orbital. Normalmente, esto no es un problema, porque debido a la naturaleza dual del espín, su promedio a lo largo de una distribución continua de materia se anula, por tanto una caracterización dinámica de dicha distribución puede realizarse únicamente con el tensor de energía-momento (la masa tiene carácter de monopolo y no se cancela). Es en esto lo que consiste la relatividad general, que acaba relacionando este tensor de energía-momento con un parámetro de la geometría con la que se describe el *espaciotiempo*, la curvatura. La hipótesis natural después de esto sería suponer que en situaciones donde el promedio del espín no se anule, el tensor de momento angular de espín se acoplaría a su vez a otro parámetro en la descripción geométrica del espacio-tiempo. Se verá que este nuevo parámetro geométrico es la torsión.

Por tanto, adelantando un poco a los acontecimientos, podemos cambiar la frase de “la materia le dice al espacio como curvarse, y el espacio le dice a la materia como moverse” a “la materia le dice al espacio qué geometría adoptar y el espacio le dice a la materia como moverse”. La masa determinará la curvatura del espacio y el espín la torsión.

Dicho esto, es posible empezar con el desarrollo matemático del capítulo.

4.1.2. Notación

- En este capítulo se trabaja con una conexión métrica arbitraria $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$. No se debe confundir con la conexión $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ del capítulo anterior, que era la de Levi-Civita. Ahora, cuando esta última aparezca, se la denotará por $\{\lambda_{\mu\nu}\}$.
- A la derivada covariante y a los tensores asociados a la conexión arbitraria se les denota de la forma usual (R, T, ∇) , mientras que a los asociados a la conexión de Levi-Civita se les denota $(R^\{\}, T^\{\}, \nabla^\{\})$.

Es importante hacer este inciso en la notación porque va a resultar que una conexión arbitraria ligada a la condición métrica va a poder dividirse en parte simétrica y parte-no simétrica, siendo la primera la conexión de Levi-Civita y la segunda un objeto matemático de carácter tensorial (es un tensor porque “*transforma bien*”) conocido por contorsión.

4.1.3. Contorsión

Se considera una conexión métrica arbitraria $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$. Siguiendo el mismo esquema que en cálculo de la expresión analítica para la conexión de Levi-Civita, se consideran las 3 derivadas

covariantes de la métrica, y se procede a calcular una expresión para una conexión métrica arbitraria:

$$0 = g_{\mu\nu;\lambda} = g_{\mu\nu,\lambda} - \Gamma^\alpha_{\lambda\mu}g_{\alpha\nu} - \Gamma^\alpha_{\lambda\nu}g_{\alpha\mu}$$

$$0 = g_{\mu\lambda;\nu} = g_{\mu\lambda,\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\mu}g_{\alpha\lambda} - \Gamma^\alpha_{\nu\lambda}g_{\alpha\mu}$$

$$0 = g_{\nu\lambda;\mu} = g_{\nu\lambda,\mu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}g_{\alpha\lambda} - \Gamma^\alpha_{\mu\lambda}g_{\alpha\nu}$$

Ahora la idea es combinar estas expresiones de manera que sea posible despejar uno de los términos de la conexión. Con Levi-Civita, la combinación era la suma de dos de ellas y la resta de la otra. Se realiza la misma en este caso:

$$0 = g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\mu\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\mu} - \Gamma^\alpha_{\lambda\mu}g_{\alpha\nu} - \Gamma^\alpha_{\lambda\nu}g_{\alpha\mu} - \Gamma^\alpha_{\nu\mu}g_{\alpha\lambda} - \Gamma^\alpha_{\nu\lambda}g_{\alpha\mu} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}g_{\alpha\lambda} + \Gamma^\alpha_{\mu\lambda}g_{\alpha\nu}$$

Teniendo en cuenta que, $T^\sigma_{\mu\nu} = \Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma_{\nu\mu}$, se tiene:

$$\begin{aligned} 0 &= g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\mu\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\mu} - \Gamma^\alpha_{\lambda\mu}g_{\alpha\nu} - \Gamma^\alpha_{\lambda\nu}g_{\alpha\mu} - \Gamma^\alpha_{\nu\mu}g_{\alpha\lambda} - (T^\alpha_{\nu\lambda} + \Gamma^\alpha_{\lambda\nu})g_{\alpha\mu} \\ &\quad + (T^\alpha_{\mu\nu} + \Gamma^\alpha_{\nu\mu})g_{\alpha\lambda} + (T^\alpha_{\mu\lambda} + \Gamma^\alpha_{\lambda\mu})g_{\alpha\nu} \\ &= g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\mu\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\mu} + T^\alpha_{\mu\lambda}g_{\alpha\nu} + T^\alpha_{\mu\nu}g_{\alpha\lambda} + (T^\alpha_{\lambda\nu} - 2\Gamma^\alpha_{\lambda\nu})g_{\alpha\mu} \end{aligned}$$

Despejando la conexión:

$$\begin{aligned} \Gamma^\alpha_{\lambda\nu} &= \frac{1}{2}g^{\alpha\mu}(g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\mu\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\mu} + T^\alpha_{\mu\lambda}g_{\alpha\nu} + T^\alpha_{\mu\nu}g_{\alpha\lambda}) + \frac{1}{2}T^\alpha_{\lambda\nu} \\ &= \frac{1}{2}g^{\alpha\mu}(g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\mu\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\mu}) + \frac{1}{2}(T^\alpha_{\nu\lambda} + T^\alpha_{\lambda\nu} + T^\alpha_{\lambda\nu}) \\ &= \{\lambda\nu\}^\alpha + \frac{1}{2}(T^\alpha_{\nu\lambda} + T^\alpha_{\lambda\nu} + T^\alpha_{\lambda\nu}) \end{aligned}$$

Por tanto la expresión final para la conexión resulta en:

$$\Gamma^\alpha_{\lambda\nu} = \{\lambda\nu\}^\alpha + K^\alpha_{\lambda\nu}$$

Donde se ha definido *contorsión* como el tensor correspondiente a la parte sin simetría definida de una conexión métrica:

$$K^\alpha_{\lambda\nu} = \frac{1}{2}(T^\alpha_{\nu\lambda} + T^\alpha_{\lambda\nu} + T^\alpha_{\lambda\nu}) \quad (4.1)$$

Que la conexión tenga esta forma de Levi-Civita+Contorsión permite hacer una consideración importante de cara a este trabajo: si en Relatividad General, la variación de la acción de Einstein-Hilbert con respecto a la conexión de Levi-Civita resultaba en una ecuación de campo nula, ahora en Gravedad de Einstein-Cartan, la variación en dicha acción da igual efectuarla con respecto a la conexión o con respecto a la contorsión. Esto es así porque las derivadas con respecto a la conexión coinciden con las derivadas con respecto a la contorsión dado que la relación entre ambas es lineal. Esto jugará un papel importante más adelante cuando se defina el *tensor de espín*.

4.1.4. Ecuación de la métrica

Partiendo de la acción correspondiente a una conexión general,

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int R(g, \Gamma) \sqrt{|g|} d^4x + \int \mathcal{L}_{mat}(\chi, g, \Gamma) \sqrt{|g|} d^4x$$

redefiniendo el tensor de energía-momento para el nuevo lagrangiano dependiente de la conexión,

$$\tau_{\gamma\rho} = \frac{-2}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial(\sqrt{|g|} \mathcal{L}_{mat}(\chi, g, \Gamma))}{\partial g^{\gamma\rho}}$$

y siguiendo el formalismo de Palatini, la ecuación de la métrica es la misma que en Relatividad General:

$$R_{\gamma\rho} - \frac{1}{2} R g_{\gamma\rho} = \kappa \tau_{\gamma\rho} \quad (4.2)$$

o en función del tensor de Einstein:

$$G_{\gamma\rho} = \kappa \tau_{\gamma\rho}$$

con un matiz: el tensor y el escalar de Ricci presentes en las ecuaciones son los correspondientes a la nueva conexión, y por tanto el tensor de Einstein también está en función de la misma.

Por tanto, formalmente, en este capítulo las ecuaciones de Einstein de Relatividad General serían un caso particular de 4.2 y se denotarían como:

$$R_{\gamma\rho}^{\{\}} - \frac{1}{2} R^{\{\}} g_{\gamma\rho} = \kappa \tau_{\gamma\rho}^{\{\}} \quad G_{\gamma\rho}^{\{\}} = \kappa \tau_{\gamma\rho}^{\{\}}$$

4.1.5. Ecuación de la conexión

Al igual que con la métrica, si se plantea la ecuación para la conexión el proceso es el mismo que en el capítulo anterior. En este caso se tendría entonces que, si se considera en primer lugar la acción en ausencia de campos de materia, es decir, la acción de Einstein-Hilbert:

$$S_{EH} = \frac{1}{2\kappa} \int R(g, \Gamma) \sqrt{|g|} d^4x$$

la ecuación de campo resultante es:

$$g^{\mu\beta} \delta_\alpha^\gamma T^\nu_{\mu\nu} + g^{\mu\beta} T^\alpha_{\gamma\mu} + g^{\alpha\beta} T^\nu_{\nu\gamma} = 0 \quad (4.3)$$

que es la misma que B.2. Considerando las ecuaciones de Euler para una acción *completa*, que considere un campo de materia no nulo:

$$\frac{1}{2\kappa} \sqrt{|g|} \left(g^{\mu\beta} \delta_\alpha^\gamma T^\nu_{\mu\nu} + g^{\mu\beta} T^\alpha_{\gamma\mu} + g^{\alpha\beta} T^\nu_{\nu\gamma} \right) = - \frac{\partial(\sqrt{|g|} \mathcal{L}_{mat}(\chi, g, \Gamma))}{\partial \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}}$$

Definiendo como *tensor de espín* $s^\alpha_\gamma{}^\beta$ (la ordenación de índices puede resultar un poco extraña, pero pronto se verá que tiene sentido) a :

$$s^\alpha_\gamma{}^\beta = \frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L}_{mat}(\chi, g, \Gamma))}{\partial\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}}$$

Y la segunda ecuación de campo en gravedad de Einstein-Cartan resulta:

$$g^{\mu\beta}\delta_\gamma^\alpha T^\nu_{\mu\nu} + g^{\mu\beta}T^\alpha_{\gamma\mu} + g^{\alpha\beta}T^\nu_{\nu\gamma} = -\kappa s^\alpha_\gamma{}^\beta \quad (4.4)$$

Se puede jugar un poco con la expresión 4.4 para bajar todos los índices del tensor de espín, que resulta en una expresión más cómoda de manejar.

$$\begin{aligned} s_{\rho\gamma\lambda} &= g_{\alpha\rho}g_{\beta\lambda}s^\alpha_\gamma{}^\beta = \frac{-1}{\kappa}g_{\alpha\rho}g_{\beta\lambda} \left(g^{\mu\beta}\delta_\gamma^\alpha T^\nu_{\mu\nu} + g^{\mu\beta}T^\alpha_{\gamma\mu} + g^{\alpha\beta}T^\nu_{\nu\gamma} \right) = \\ &= \frac{-1}{\kappa} (g_{\gamma\rho}T^\nu_{\lambda\nu} + T_{\rho\gamma\lambda} + g_{\rho\lambda}T^\nu_{\nu\gamma}) \end{aligned}$$

En esta última expresión se justifica la ordenación de índices en la definición del tensor de espín ($s^\alpha_\gamma{}^\beta$). El tensor de espín es antisimétrico en dos de sus índices. Ordenándolos de esta forma, los dos últimos índices del tensor de espín se corresponden con los índices antisimétricos, adoptando el mismo criterio que se adoptaba con la torsión. La ecuación 4.4 expresa el tensor de espín como una combinación de torsiones. Es interesante sin embargo, dar la vuelta a esta ecuación y expresar la torsión como una combinación de espines.

El único término que molesta para poder despejar torsión en función de espín es el primero, por tanto el procedimiento pasa por contraer los índices adecuados, ρ y λ en este caso, para poder despejar:

$$\begin{aligned} T^\nu_{\gamma\nu} + T^\nu_{\gamma\nu} + DT^\nu_{\nu\gamma} &= -\kappa s^\nu_{\gamma\nu} \\ (D-2)T^\nu_{\gamma\nu} &= \kappa s^\nu_{\gamma\nu} \\ T^\nu_{\gamma\nu} &= \frac{1}{D-2}\kappa s^\nu_{\gamma\nu} \end{aligned}$$

Sustituyendo en la segunda ecuación de campo:

$$\begin{aligned} g_{\gamma\rho}\frac{1}{D-2}\kappa s^\nu_{\lambda\nu} + T_{\rho\gamma\lambda} - g_{\rho\lambda}\frac{1}{D-2}\kappa s^\nu_{\gamma\nu} &= -\kappa s_{\rho\gamma\lambda} \\ T_{\rho\gamma\lambda} &= -\kappa \left[s_{\rho\gamma\lambda} + \frac{1}{D-2}(g_{\gamma\rho}s^\nu_{\lambda\nu} - g_{\rho\lambda}s^\nu_{\gamma\nu}) \right] \end{aligned}$$

Tomando 4 dimensiones, $D = 4$:

$$T_{\rho\gamma\lambda} = -\kappa \left[s_{\rho\gamma\lambda} + \frac{1}{2}(g_{\gamma\rho}s^\nu_{\lambda\nu} - g_{\rho\lambda}s^\nu_{\gamma\nu}) \right] = -\kappa \left(s_{\rho\gamma\lambda} + \frac{1}{2}g_{\gamma\rho}s^\nu_{\lambda\nu} - \frac{1}{2}g_{\rho\lambda}s^\nu_{\gamma\nu} \right) \quad (4.5)$$

Y esta ecuación 4.5 es clave, porque con la torsión expresada en función del tensor de espín, se puede expresar la contorsión en función del espín. Con esta a la conexión y con la conexión

a los tensores de curvatura que conforman la ecuación 4.2. En última instancia, se podrá expresar el tensor de Einstein y el tensor de energía-momento, en función del tensor de espín, reduciendo así, las dos ecuaciones, 4.2 y 4.4, a una sola ecuación de campo.

El primer paso es ver como cambia el tensor de curvatura de una conexión métrica arbitraria con respecto al asociado a Levi-Civita.

4.1.6. Tensor de curvatura para una conexión métrica arbitraria.

Se considera una conexión $\Gamma^k_{ij} = \left\{ \begin{smallmatrix} k \\ ij \end{smallmatrix} \right\} + K^k_{ij}$, siendo $\left\{ \begin{smallmatrix} k \\ ij \end{smallmatrix} \right\}$ la conexión de Levi-Civita y K^k_{ij} un tensor arbitrario. Con el objetivo de llegar a calcular el tensor de Einstein para una conexión no simétrica, $R_{\mu\lambda}$, se puede calcular como varía el tensor de Riemann de esta conexión con respecto al tensor de Riemann de Levi-Civita.

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\lambda}{}^\rho &= \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\lambda} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\lambda} + \Gamma^\rho_{\mu\sigma} \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} - \Gamma^\rho_{\nu\sigma} \Gamma^\sigma_{\mu\lambda} \\ &= \partial_\mu (\left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ \nu\lambda \end{smallmatrix} \right\} + K^\rho_{\nu\lambda}) - \partial_\nu (\left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ \mu\lambda \end{smallmatrix} \right\} + K^\rho_{\mu\lambda}) + (\left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ \mu\sigma \end{smallmatrix} \right\} + K^\rho_{\mu\sigma}) (\left\{ \begin{smallmatrix} \sigma \\ \nu\lambda \end{smallmatrix} \right\} + K^\sigma_{\nu\lambda}) - (\left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ \nu\sigma \end{smallmatrix} \right\} + K^\rho_{\nu\sigma}) (\left\{ \begin{smallmatrix} \sigma \\ \mu\lambda \end{smallmatrix} \right\} + K^\sigma_{\mu\lambda}) \\ &= \partial_\mu (\left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ \nu\lambda \end{smallmatrix} \right\}) - \partial_\nu (\left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ \mu\lambda \end{smallmatrix} \right\}) + \left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ \mu\sigma \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} \sigma \\ \nu\lambda \end{smallmatrix} \right\} - \left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ \nu\sigma \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} \sigma \\ \mu\lambda \end{smallmatrix} \right\} \\ &+ \partial_\mu K^\rho_{\nu\lambda} + \left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ \mu\sigma \end{smallmatrix} \right\} K^\sigma_{\nu\lambda} - \left\{ \begin{smallmatrix} \sigma \\ \mu\lambda \end{smallmatrix} \right\} K^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu K^\rho_{\mu\lambda} + \left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ \nu\sigma \end{smallmatrix} \right\} K^\sigma_{\mu\lambda} - \left\{ \begin{smallmatrix} \sigma \\ \nu\lambda \end{smallmatrix} \right\} K^\rho_{\mu\sigma} + K^\rho_{\mu\sigma} K^\sigma_{\nu\lambda} - K^\rho_{\nu\sigma} K^\sigma_{\mu\lambda} \\ &= R_{\mu\nu\lambda}{}^\rho + \nabla_\mu^{\{\}} K^\rho_{\nu\lambda} + \left\{ \begin{smallmatrix} \sigma \\ \mu\nu \end{smallmatrix} \right\} K^\rho_{\sigma\lambda} - \nabla_\nu^{\{\}} K^\rho_{\mu\lambda} - \left\{ \begin{smallmatrix} \sigma \\ \nu\mu \end{smallmatrix} \right\} K^\rho_{\sigma\lambda} + K^\rho_{\mu\sigma} K^\sigma_{\nu\lambda} - K^\rho_{\nu\sigma} K^\sigma_{\mu\lambda} \\ &= R_{\mu\nu\lambda}{}^\rho + \nabla_\mu^{\{\}} K^\rho_{\nu\lambda} + T^{\{\}}{}^\sigma{}_{\mu\lambda} K^\rho_{\sigma\lambda} - \nabla_\nu^{\{\}} K^\rho_{\mu\lambda} + K^\rho_{\mu\sigma} K^\sigma_{\nu\lambda} - K^\rho_{\nu\sigma} K^\sigma_{\mu\lambda} \end{aligned}$$

Y puesto que los símbolos de Christoffel son simétricos:

$$R_{\mu\nu\lambda}{}^\rho = R_{\mu\nu\lambda}{}^\rho + \nabla_\mu^{\{\}} K^\rho_{\nu\lambda} - \nabla_\nu^{\{\}} K^\rho_{\mu\lambda} + K^\rho_{\mu\sigma} K^\sigma_{\nu\lambda} - K^\rho_{\nu\sigma} K^\sigma_{\mu\lambda}$$

4.1.7. Tensor de Einstein para una conexión métrica arbitraria.

Contrayendo a partir del tensor de Riemann calculado en el apartado anterior, el tensor de Ricci resulta:

$$R_{\nu\lambda} = R_{\mu\nu\lambda}{}^\mu = R^{\{\}}{}_{\nu\lambda} + \nabla_\mu^{\{\}} K^\mu_{\nu\lambda} - \nabla_\nu^{\{\}} K^\mu_{\mu\lambda} + K^\mu_{\mu\sigma} K^\sigma_{\nu\lambda} - K^\mu_{\nu\sigma} K^\sigma_{\mu\lambda}$$

Y el escalar de Ricci:

$$R = g^{\nu\lambda} R_{\nu\lambda} = R^{\{\}} + \nabla_\mu^{\{\}} K^\mu{}_{\nu}{}^{\nu} - \nabla_\nu^{\{\}} K^\mu{}_{\mu}{}^{\nu} + K^\mu{}_{\mu\sigma} K^\sigma{}_{\nu}{}^{\nu} - K^\mu{}_{\nu\sigma} K^\sigma{}_{\mu}{}^{\nu}$$

Hasta ahora, se ha operado considerando a K un tensor arbitrario. En relatividad de Einstein-Cartan, la conexión que se va a utilizar se puede dividir en una componente totalmente

simétrica, la conexión de Levi-Civita, y una sin simetría definida, la contorsión. Sea K el tensor contorsión definido con anterioridad.

Dado que el tensor de Einstein está definido como $G_{\mu\lambda} = R_{\mu\lambda} - \frac{1}{2}g_{\mu\lambda}R$, resulta finalmente que:

$$\begin{aligned} G_{\nu\lambda} = & G_{\nu\lambda}^{\{\}} + \nabla_{\mu}^{\{\}} K^{\mu}{}_{\nu\lambda} - \nabla_{\nu}^{\{\}} K^{\mu}{}_{\mu\lambda} + K^{\mu}{}_{\mu\sigma} K^{\sigma}{}_{\nu\lambda} - K^{\mu}{}_{\nu\sigma} K^{\sigma}{}_{\mu\lambda} \\ & - \frac{1}{2}g_{\nu\lambda}(\nabla_{\rho}^{\{\}} K^{\nu}{}_{\nu}{}^{\rho} - \nabla_{\nu}^{\{\}} K^{\nu}{}_{\rho}{}^{\rho} + K^{\nu}{}_{\rho\sigma} K^{\sigma}{}_{\nu}{}^{\rho} - K^{\nu}{}_{\nu\sigma} K^{\sigma}{}_{\rho}{}^{\rho}) \end{aligned} \quad (4.6)$$

4.1.8. Tensor de energía-momento de Belifante-Rosenfeld

De 4.6, se obtiene una ecuación de campo que acopla curvatura y torsión al tensor de energía-momento, siendo este el tensor de energía-momento propio de la relatividad general, al que se denominará a partir de ahora como *tensor de energía-momento canónico*. Sin embargo, la presencia de espín rompe la simetría de este tensor. Es interesante expresar las ecuaciones de campo con respecto a un tensor de energía-momento que preserve su simetría, y cuya divergencia siga siendo nula. Este va a ser el tensor de Belifante-Rosenfeld, o más bien una versión del mismo que se apoye en la misma idea. La expresión analítica aparece en la ecuación 4.7[2].

$$\Sigma_{\nu\lambda} = \tau_{\mu\lambda} - \frac{1}{2}(\nabla_{\rho} - 2T^{\mu}{}_{\rho\mu})(s_{\nu\lambda}{}^{\rho} - s_{\lambda}{}^{\rho}{}_{\nu} + s^{\rho}{}_{\nu\lambda}) \quad (4.7)$$

Finalmente, tomando las ecuaciones 4.1, 4.5, 4.6, 4.7, se obtiene:

$$\begin{aligned} G^{\{\}\nu\lambda} = & \kappa\tau^{\nu\lambda} + \frac{1}{2}\kappa^2 \left(s^{\nu\rho}{}_{\rho} s^{\lambda\mu}{}_{\mu} - s^{\nu\rho}{}_{\mu} s^{\lambda\mu}{}_{\rho} - s^{\nu\rho\mu} s^{\lambda}{}_{\rho\mu} + \right. \\ & \left. \frac{1}{2}s^{\rho\mu\nu} s_{\rho\mu}{}^{\lambda} + \frac{1}{4}g^{\nu\lambda}(2s_{\rho}{}^{\mu}{}_{\sigma} s^{\rho\sigma}{}_{\mu} - 2s_{\rho}{}^{\mu}{}_{\mu} s^{\rho\sigma}{}_{\sigma} + s^{\rho\mu\sigma} s_{\mu\sigma}) \right) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Capítulo 5

Cosmología

5.1 Cosmología en Gravedad de Einstein-Cartan

Tanto en Relatividad General, como en Gravedad de Einstein-Cartan, las ecuaciones de campo resultantes constituyen un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales acopladas demasiado complicado como para resolver analíticamente, incluso para los sistemas gravitatorios más simples. Se suele recurrir por tanto, a distintas simplificaciones, generalmente basadas en alguna simetría, que facilitan su resolución para algún caso en particular: la geometría esférica (Schwarzschild), la aproximación de campo medio, etc. Entre todas ellas, la más utilizada es la cosmología. Tan utilizada de hecho, que a menudo se confunde con una descripción fundamental del universo. Sin embargo, no llega a serlo. La cosmología se apoya en unas ecuaciones de campo, dadas por la Relatividad General o alguna de sus alternativas, en este caso la Gravedad de Einstein-Cartan. *Es decir, en este trabajo, se entiende por Cosmología al marco aproximativo utilizado para resolver unas ecuaciones de campo, sean las de Relatividad General o las de Gravedad de Einstein-Cartan.*

La cosmología aspira a explicar todo el Universo, por lo que el lector podría esperar que fuese el problema más complicado al cual se enfrenta la ciencia, si se intenta describir todo el Universo hasta el punto de describir cada átomo en él. Obviamente este no va a ser el caso. La cosmología describe el universo como si fuera un fluido uniforme, simplificándolo a nivel estructural hasta el punto que ni las galaxias van a ser entes distinguibles. Por supuesto, es en el paso intermedio entre esta descripción universal, y la estructura real del Universo, donde van a existir algunas de las mayores dificultades de la teoría.

Algunas consideraciones previas a comenzar con la cosmología en sí:

- Hay soluciones de universos vacíos, pero observacionalmente están descartados, por tanto, no se puede asumir $T_{\mu\nu} = 0$ (como se haría por ejemplo en la aproximación de Schwarzschild).
- A pesar de que en un principio Einstein consideró el Universo como estático, hoy sabemos que el Universo no lo es. Luego no tendría sentido asumir independencia temporal.
- Como ya se ha mencionado, va a ser necesario identificar algunas simetrías, para

simplificar el sistema de ecuaciones en derivadas parciales acopladas que constituyen las ecuaciones de campo. En este sentido, la cosmología se apoya sobre lo que se conoce como Principio Cosmológico, que establece que a escalas lo suficientemente grandes el Universo es espacialmente homogéneo e isótropo.

Comenzando por la simetrías, como ya se ha mencionado, la cosmología considera dos de tipo espacial *espaciales* (entendiendo por espaciales a las tres dimensiones de la variedad diferenciable en la descripción *espaciotemporal* que comparten signo en la métrica):

1. **Homogeneidad:** Es decir, existe una *invarianza traslacional*.
2. **Isotropía:** Existe una *invarianza rotacional*.

Es decir, no hay ni puntos ni direcciones preferentes. Para ilustrar estas simetrías, se puede por ejemplo pensar en algunas variedades simples. Tomando como geometría espacial un cilindro hueco, se puede argumentar que este es definitivamente homogéneo porque, para un “habitante” de su superficie, es imposible determinar su posición sobre el mismo sin algún tipo de referencia. Sin embargo, no es isótropo, pues la curvatura, característica intrínseca a la superficie, es distinta para cada una de las direcciones espaciales (esta dependencia de la curvatura con las direcciones en el espacio tangente al punto que señala la posición del “habitante”, es equivalente para cada punto del cilindro, dada su homogeneidad). El ejemplo contrario, el de una variedad isótropa pero no homogénea, lo encontramos en una simetría esférica. En el centro de la misma, existe una isotropía que no se conserva al moverse a cualquier otro punto, por lo tanto no hay invarianza traslacional y no es homogénea. Conviene en este punto señalar la que es una de las confusiones más habituales en el mundo de la cosmología divulgativa. Cuando más adelante se hable del origen del Universo, y del Big Bang, es importante darse cuenta de que el Universo no se origina de una “explosión” en un punto y se expande esféricamente a partir del mismo, por lo menos no dentro del marco cosmológico, pues esta sería una geometría no homogénea.

A un espacio geométrico que cumpla las condiciones de homogeneidad y de isotropía se le denomina *maximalmente simétrico*, y va a resultar que solo existen tres geometrías que puedan generarlo: la plana, la esférica y la hiperbólica.

5.1.1. Métrica de Robertson-Walker

Se van a utilizar estas simetrías para elegir un sistema de coordenadas, las *coordenadas comóviles*, con el objetivo de que estas se muevan a medida que el espacio se expande para mantener las distancias fijas. En estos términos, se puede empezar planteando una expresión para la métrica de la forma:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \gamma_{ij}(u) du^i du^j \quad i, j = 1, 2, 3$$

donde $\gamma_{ij}(u) du^i du^j$ es la parte espacial independiente del tiempo. Es común en cosmología referirse a ella como $d\sigma^2$. Conviene notar que se han utilizado índices latinos para referirse únicamente a las coordenadas espaciales. Cuando se haga referencia a todas ellas, incluyendo la temporal, se utilizarán índices griegos.

Es importante recalcar que todo el análisis que se va a realizar está referido a observadores en reposo con el fluido del universo. Es decir, se suele decir que como el universo es homogéneo e isótropo, todos los observadores ven lo mismo, estén donde estén y miren en la dirección que miren, pero esto solo es cierto para observadores en reposo con respecto al fluido. Para observadores en movimiento, la simetría cosmológica se rompe, pues el movimiento crea una dirección especial. Obviamente, este va ser el caso de mediciones realizadas desde la Tierra, dado que esta está en movimiento.

En un espacio maximalmente simétrico, la expresión del Riemann queda simplificada a una expresión que únicamente depende de la métrica:

$$R_{ijkl} = k(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})$$

Y si la expresión del Riemann es manejable, más lo van a ser las contracciones del Ricci y del escalar de Ricci, que en dimensión 3 van a quedar reducidas a:

$$R_{jl} = g^{ki} R_{ijkl} = 2kg_{jl} \quad R = g^{jl} R_{jl} = 6k$$

lo cual es consistente con el ejemplo de homogeneidad presentado al principio de esta sección. Si la curvatura, constante como se ha calculado, cambiase de un punto a otro, no se respetarían la homogeneidad e isotropía del espacio en cuestión.

Puesto que la curvatura depende únicamente de una constante, k , el siguiente paso es estudiar las distintas posibilidades de espacio que ofrecen los distintos valores de esta constante.

- $k = 0$ *Universo plano*: En el caso de que $k = 0$, la curvatura se anula y el universo es plano, \mathbb{R}^3 . En coordenadas esféricas se puede reescribir la parte espacial de la métrica invariante con el tiempo como:

$$d\sigma^2 = dx^2 + x^2 d\Omega_2^2$$

donde $d\Omega_2$ representa el diferencial de esfera angular de dimensión 2.

- $k > 0$ *Universo cerrado*: Si $k > 0$, la curvatura del espacio es positiva, y por tanto el Universo tiene la geometría de una 3-esfera, S^3 . Además su volumen es finito. En analogía a la geometría de la misma, se suele denominar a este tipo de universo como Universo cerrado. La métrica espacial asociada queda por tanto:

$$d\sigma^2 = d\Omega_3^2 = dx^2 + \sin^2 x d\Omega_2^2$$

donde $d\Omega_3$ es el diferencial angular de esfera en 3 dimensiones.

- $k < 0$ *Universo abierto*: Por último, si $k < 0$, la curvatura del universo es negativa, teniendo por tanto una geometría hiperbólica $= bH^3$. A este tipo de Universo se le conoce como Universo abierto, y su métrica es:

$$d\sigma^2 = dx^2 + \sinh^2 x d\Omega_2^2$$

Se introduce ahora una nueva coordenada para simplificar el cambio entre las 3 geometrías diferentes:

$$dx = \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \implies d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega_2^2 \quad k = 0, \pm 1$$

Por ejemplo,

$$k = -1 \quad dx = \frac{dr}{\sqrt{1+r^2}} \implies x = \sinh^{-1}(r)$$

y lo mismo para $k=0,1$.

La métrica queda entonces como:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \gamma_{ij}(u) du^i du^j = c^2 dt^2 - R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega_2^2 \right] \quad (5.1)$$

A la métrica descrita por 5.1 se la conoce como métrica de Robertson-Walker. Refinando las coordenadas un poco más con las siguiente definiciones:

- *Factor de escala adimensional*: $a(t) := \frac{R(t)}{R_0}$
- *Coordenada radial*: $r := R_0 \vec{r}$
- *Curvatura espacial*: $K := \frac{k}{R_0^2}$

Se obtiene la expresión final para la métrica utilizada en Cosmología:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega_2^2 \right] \quad (5.2)$$

5.1.2. Tensor de energía-momento para un fluido de espín

El tensor macroscópico de energía-momento canónico de un fluido de espín esta dado por:

$$\tau_{\mu\lambda} = c \prod_{\mu} u_{\nu} - p(g_{\mu\lambda} - u_{\mu} u_{\lambda}) \quad (5.3)$$

y el tensor macroscópico de espín canónico esta dado por:

$$s_{\mu\nu}{}^{\lambda} = s_{\mu\nu} u^{\lambda} \quad , \quad s_{\mu\nu} u^{\nu} = 0 \quad (5.4)$$

donde \prod_{μ} es la densidad cuádrimomento del fluido, u^{μ} es la cuádrivelocidad, $s_{\mu\nu}$ es la densidad de espín, y p su presión.

A partir de 4.8, 5.3 y 5.4, se obtiene [2]:

$$G^{\mu\lambda} = \kappa \left(\epsilon - \frac{1}{4} \kappa s^2 \right) u^{\mu} u^{\lambda} - \kappa \left(p - \frac{1}{4} \kappa s^2 \right) (g^{\mu\lambda} - u^{\mu} u^{\lambda}) - \frac{1}{2} \kappa (\delta_{\rho}^{\nu} + u_{\rho} u^{\nu}) \nabla_{\nu}^{\{\} } (s^{\rho\mu} u^{\lambda} + s^{\rho\lambda} u^{\mu}) \quad (5.5)$$

donde $\epsilon = c \prod_{\mu} u^{\mu}$ es la densidad de energía en reposo del fluido y $s^2 = \frac{1}{2} s_{\mu\lambda} s^{\mu\lambda} > 0$ es el cuadrado de la densidad de espín. Si la orientación de las partículas en un fluido de espín es aleatoria, entonces el último término de la derecha se anula al hacer la media. Por tanto, las ecuaciones de Einstein-Cartan para ese tipo de fluido de espín son equivalentes a las ecuaciones de Einstein para un fluido perfecto con la densidad de energía efectiva $\epsilon - \kappa s^2/4$ y la presión efectiva $p - \kappa s^2/4$.

5.1.3. Ecuaciones de Friedman con Torsión

Análogamente al proceso que se haría en cosmología para Relatividad General utilizando un fluido perfecto, se pueden obtener las ecuaciones de Friedman para un fluido de espín. Para ello, el primer paso es fijar un observador en reposo con el fluido. En esta situación, se tiene que $u^0 = 1$ y $u^1 = u^2 = u^3 = 0$. Además, se supondrá para este trabajo que el Universo es cerrado. Considerando un Universo cerrado ($K=1$), y para un observador en reposo con el fluido de espín, las ecuaciones de campo para la gravedad de Einstein-Cartan 5.5, con la métrica 5.2, se obtiene:

$$00 : \quad -3\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\kappa}{2} \left(\epsilon + 3p + \frac{1}{2}\kappa s^2 \right) \quad (5.6)$$

$$ij : \quad 2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2}{a^2} = -\kappa \left(p - \frac{1}{4}\kappa s^2 \right) \quad (5.7)$$

donde el punto indica derivación temporal. De estas dos ecuaciones se obtiene la ecuación de Friedman, (sumando a la primera 3 veces la segunda),

$$\dot{a}^2 + 1 = \frac{1}{3}\kappa \left(\epsilon - \frac{1}{4}\kappa s^2 \right) a^2, \quad (5.8)$$

Las soluciones a 5.8 se llaman denominan soluciones de Friedman-Robertson-Walker.

Definiendo como *parámetro de Hubble* a

$$H(t) = c \frac{\dot{a}}{a}$$

se puede expresar 5.8 como

$$H^2 = \frac{1}{3}\kappa \left(\epsilon - \frac{1}{4}\kappa s^2 \right) c^2 - \frac{c^2}{a^2}, \quad (5.9)$$

De esta ecuación se puede medir el valor de H , pero no ϵ ni s^2 . De 5.8 se puede deducir la ley de conservación [2]:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 = \frac{d}{dt} \left((\epsilon - \kappa s^2/4) a^3 \right) + (p - \kappa s^2/4) \frac{d}{dt} (a^3) \quad (5.10)$$

Si el fluido se describe con una ecuación de estado barotrópica, se tiene $p = \omega\epsilon$, donde ω diferentes tipos de fluidos perfectos. Para el caso relativista general, donde $s = 0$, 5.10 adopta la forma

$$\dot{\epsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a} (1 + \omega) \epsilon = 0$$

que es una ecuación diferencial ordinaria fácil de resolver por el método de variables separadas:

$$\frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon} = -3(1 + \omega) \frac{\dot{a}}{a} \implies \ln \epsilon = -3(1 + \omega) \ln a \implies \epsilon = \epsilon_0 a^{-3(1+\omega)}$$

el cual es en realidad un resultado intuitivo en varios casos de fluido.

- **Materia (polvo):** $p_\mu = 0 \implies \omega = 0 \implies \epsilon_\mu \propto a^{-3}$. Se puede interpretar este resultado teniendo en cuenta que la densidad energética es $\epsilon = \frac{E}{V}$, por tanto a medida que aumenta el volumen (con a en cada una de sus dimensiones), disminuye la densidad energética.
- **Radiación:** $p_R = \frac{1}{3}\epsilon_R \implies \omega = \frac{1}{3} \implies \epsilon_R \propto a^{-4}$. Pensando en radiación como luz, si el volumen se expande, los fotones experimentan un corrimiento al rojo en la dirección en la que viajan. Así que se tiene que la densidad energética disminuye por un factor a^{-3} por el volumen, y un factor a^{-1} por el corrimiento al rojo en esa dirección, resultando en a^{-4} .
- **Vacío:** $p_V = -\epsilon_V \implies \omega = -1 \implies \epsilon_V \propto a^0$, lo cual tiene sentido, pues no puede haber movimiento relativo al vacío.

En una situación general en el modelo de Einstein-Cartan, donde $s \neq 0$, se podría expresar la densidad energética total del universo ϵ como las contribuciones correspondientes a los distintos fluidos del caso de espín nulo, más la contribución de un fluido de espín, ϵ_S :

$$\epsilon_T = \epsilon + \epsilon_s = \epsilon_\mu + \epsilon_R + \epsilon_V + \epsilon_S$$

Este planteamiento solo es posible porque resulta que [2]

$$\epsilon_S = -\frac{1}{4}\kappa s^2 \propto a^{-6},$$

independientemente del valor de ω , luego se puede interpretar el fluido de espín como un fluido exótico, independiente de los fluidos de Friedman estándares, para el cual $p_S = \epsilon_S < 0$ (fluido con $\omega = 1$) (descripción puramente formal pues $p_S(\epsilon_S)$ no representa ninguna ecuación física de estado).

En el universo primitivo, las contribuciones de materia y de vacío son muy pequeñas en relación a las contribuciones de radiación y de espín.

$$\epsilon_T = \epsilon_{R0}\hat{a}^{-4} + \epsilon_{S0}\hat{a}^{-6}$$

donde $\hat{a} = a/a_0$ es el factor de escala normalizado y el subíndice 0 indica cantidades medidas en el presente.

La ecuación de Friedman 5.9 se puede expresar como:

$$H^2 + \frac{c^2}{a^2} = \frac{1}{3}\kappa(\epsilon + \epsilon_S)c^2, \quad (5.11)$$

El parámetro de densidad total presente, $\Omega = (\epsilon + \epsilon_S)/\epsilon_c$, donde $\epsilon_c = 3H_0^2/(\kappa c^2)$ es la densidad de energía crítica presente, da $a_0 H_0 \sqrt{\Omega - 1} = c$, como en cosmología estándar. El parámetro de densidad total en cualquier instante es:

$$\Omega(\hat{a}) = \frac{\kappa c^2}{3H^2}(\epsilon + \epsilon_S), \quad (5.12)$$

y satisface

$$a|H|\sqrt{\Omega(\hat{a}) - 1} = c \quad (5.13)$$

Usando los parámetros de densidad presente,

$$\Omega_R = \epsilon_{R0}/\epsilon_c, \quad \Omega_S = \epsilon_{S0}/\epsilon_c$$

en 5.11, y no teniendo en cuenta las densidades que se desprecian para edades tempranas del universo se tiene:

$$|H| = H_0 \left(\Omega_R \hat{a}^{-4} + \Omega_S \hat{a}^{-6} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (5.14)$$

que muestra como evoluciona el parámetro de Hubble para edades tempranas del Universo.

El parámetro de densidad total en función de \hat{a} :

$$\Omega(\hat{a}) = 1 + \frac{(\Omega - 1)\hat{a}^4}{\Omega_R \hat{a}^2 + \Omega_S} \quad (5.15)$$

Como la contribución a la densidad de energía del espín ϵ_S es negativa, también lo es el parámetro de densidad Ω_S . Esta contribución genera repulsión gravitacional significativa para valores de \hat{a} muy pequeños.

5.1.4. Parámetros de densidad

Para estimar el parámetro de densidad correspondiente al espín, Ω_S , se utilizan neutrinos reliquia (del fondo de baja energía), que son los fermiones más abundantes en el Universo, con $n = 5,6 \times 10^7 m^{-3}$ para cada tipo.

$$\Omega_S = -8,6 \times 10^{-70} \quad (5.16)$$

Este valor, aún extremadamente pequeño, no es nulo como sucedería en Relatividad General.

5.1.5. Problemas que motivan la teoría inflacionaria

La teoría inflacionaria, o inflación, es un marco teórico dentro de la cosmología estándar que da cuenta de dos problemas principalmente. El primero, conocido como el problema de la *planitud*, viene generado por las mediciones que indican la naturaleza plana del Universo, y como esto choca con la edad y tamaño del mismo. Al ritmo de crecimiento de un Universo plano, resulta imposible haber alcanzado el tamaño actual del Universo en su tiempo de vida. Por otra parte, está el problema del *horizonte*, en este caso dado por las observaciones realizadas al CMB (Cosmic Microwave Background). Estadísticamente, existe una simetría en la temperatura de puntos antipodales en el Universo. Nuevamente, dada la localización de estos puntos, en la edad del Universo y por su velocidad de expansión, se genera una incoherencia, en este caso el hecho de que estos puntos no pueden haber estado en contacto en ningún momento de la historia.

La Inflación da cuenta de ambos problemas, teorizando una expansión acelerada en los primeros instantes del Universo (lo que involucra vacíos falsos o campos escalares), que acabaría por estabilizarse a la expansión que se observa en el presente.

Se va a ver como el término del factor de densidad energética derivado del fluido de espín en teoría de Einstein-Cartan, a edades tempranas del Universo, es suficiente como para dar cuenta de ambos problemas sin necesidad de recurrir a teorías inflacionarias.

5.1.6. Problema de la planitud

De la ecuación 5.9 se puede deducir que la expansión del Universo empieza cuando $H = 0$. En ese momento $\hat{a} = \hat{a}_m$, donde

$$\hat{a}_m = \sqrt{-\frac{\Omega_S}{\Omega_R}} = 3,1 \times 10^{-33}, \quad (5.17)$$

correspondiente al mínimo pero finito factor de escala (radio de un Universo cerrado) $a_m = 9 \times 10^{-6} \text{m}$. Antes de alcanzar su tamaño mínimo, el Universo se contraía con un parámetro de Hubble negativo. Escogiendo $t = 0$ en $\hat{a} = \hat{a}_m$ e integrando 5.14 para $t > 0$ resulta en:

$$-\frac{\Omega_R^{3/2} H_0}{\Omega_S} t = f(x) = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - 1} + \frac{1}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 - 1}|, \quad (5.18)$$

donde $x = \hat{a}/\hat{a}_m$. Cuando $x \gg 1$, $f(x) \approx x^2/2$, se tiene que la evolución del universo está dominada por la radiación, $a \sim t^{1/2}$.

En Relatividad General, $\Omega_S = 0$, por tanto $\Omega(\hat{a})$ en 5.15 tiende a 1 a medida que \hat{a} tiende a 0 de acuerdo a $\Omega(\hat{a}) - 1 = (\Omega - 1)\hat{a}^2/\Omega_R$, lo cual introduce el problema de la planitud en la cosmología convencional. Se debe ajustar $\Omega(\hat{a})$ a 1 en la época GUT (*Grand Unification Theory*) en una precisión de más de 52 decimales para poder tener $\Omega = 1$ en el presente. Este problema se soluciona con la inflación cósmica, según la cual el Universo se expandió aceleradamente (por un factor de al menos 10^{26}), haciendo que $\Omega(\hat{a})$ se aproximase lo suficiente a 1 en el acercamiento GUT [2].

En gravedad de Einstein-Cartan, donde la contribución del parámetro de densidad de espín es negativa, $\Omega(\hat{a})$ es infinita en $\hat{a} = \hat{a}_m$. La función 5.15 tiene un mínimo en $\hat{a} = \sqrt{2}\hat{a}_m$, donde es igual a

$$\Omega(\sqrt{2}\hat{a}_m) = 1 - \frac{4\Omega_S(\Omega - 1)}{\Omega_R^2} = 1 + 9,9 \times 10^{-64}. \quad (5.19)$$

A medida que el Universo se expande desde \hat{a}_m hasta $\sqrt{2}\hat{a}_m$, $\Omega(\hat{a})$ decrece rápidamente de infinito a 5.19, que *parece* ajustarse a \hat{a} con precisión de 63 decimales. Este proceso dura:

$$t = -\frac{\Omega_S}{\Omega_R^{3/2} H_0} f(\sqrt{2}) = 5,3 \times 10^{-46} \text{s}. \quad (5.20)$$

Durante este periodo, el factor de expansión del Universo era solo $\sqrt{2}$, mucho menor que el factor inflacionario 10^{26} . Así, el *aparente* buen valor de 5.19 es causado de forma natural por la contribución negativa del parámetro de densidad correspondiente al espín, ligado a la torsión por Einsteins-Cartan, y sin necesidad de teoría inflacionarias. A medida que el Universo se expande, $\Omega_R \hat{a}^2$ aumenta por encima de $|\Omega_S|$ y $\Omega(\hat{a}) - 1$ crece de acuerdo a $\Omega(\hat{a}) - 1 = (\Omega - 1)\hat{a}^2/\Omega_R$, hasta que la materia domina el crecimiento del Universo.

5.1.7. Problema del horizonte

Las ecuaciones 5.13 y 5.19 resultan en

$$\dot{a} = \frac{1}{\sqrt{\Omega(\hat{a}) - 1}} \quad (5.21)$$

La velocidad en el punto antipodal con respecto al origen de coordenadas, $v_a = \pi c \dot{a}$, tiene un mínimo local en $\hat{a} = \sqrt{2}\hat{a}_m$, donde es igual a

$$v_a = \frac{\pi\Omega_R}{2\sqrt{-\Omega_S(\Omega-1)}}c = 1,1 \times 10^{32}c. \quad (5.22)$$

A medida que el Universo cerrado se expande desde \hat{a}_m a $\sqrt{2}\hat{a}_m$, v_a aumenta rápidamente desde 0 hasta 5.22. En este tiempo, el Universo esta acelerando a $\ddot{a} > 0$. Según se expande más, v_a disminuye de acuerdo a $v_a = \pi c \sqrt{\Omega_R} \hat{a}^{-1} / \sqrt{\Omega-1}$, hasta que la materia domina al Universo. Durante este proceso, el Universo desacelera, $\ddot{a} < 0$.

Si el Universo cerrado estaba causalmente conectado en algún momento $t < 0$, entonces permanece causalmente conectado durante su contracción hasta $t = 0$, y también en la expansión siguiente hasta que v_a alcance el valor de c . Después de ese momento, el punto del origen no puede comunicarse con puntos del espacio retrocediendo a velocidades superiores a c . Es decir, el radio de Hubble, $d_H = c/H$, se hace más pequeño que la distancia hasta el punto antipodal $d_a = \pi a$. El Universo contiene $N \approx (v_a/c)^3 = (d_a/d_H)^3$ volúmenes desconectados causalmente. Al tiempo dado por la ecuación 5.20, d_a es 32 órdenes de magnitud mayor que d_H y $N \approx 10^{96}$. Tal y como ocurría con el problema de la planitud, el valor extremadamente pequeño y negativo del parámetro de densidad ligado a la torsión es lo que naturalmente causa que un número de volúmenes desconexos tan enorme surja de una única región conectada del *espaciotiempo*, sin necesidad de dinámicas inflacionarias. A medida que el universo se expande aún más lejos $|\Omega_S|$ se vuelve despreciable, y el Universo entra suavemente en una época dominada por la radiación, donde N decrece de acuerdo a la cosmología estándar.

Capítulo 6

Teleparalelismo

En este capítulo, se realizará un proceso similar al del capítulo anterior pero desde el espacio tangente. Por ello será necesario introducir el concepto de Vielbein, o tétrada, que permitirá cambiar de las coordenadas generales de la variedad, en base holónoma, a las coordenadas del espacio tangente, en base ortonormal. Para esta última, se utilizarán índices latinos. Con esta nueva formulación, se derivarán de nuevo las ecuaciones de campo, obteniéndose un resultado equivalente a las obtenidas en el capítulo anterior. Se ha repetido el proceso utilizando esta formulación porque permite expresar el lagrangiano de materia correspondiente a un campo de Dirac en un espacio curvo. Esto permitirá afinar la definición del tensor de espín (que por otro lado, se definirá de forma análoga al definido en gravedad de Einstein-Cartan).

En el capítulo anterior, se ha presentado la gravedad de Einstein-Cartan como una generalización de la Relatividad General en la cual se eliminaba la restricción sobre la torsión. Se ha mencionado como la materia se ve caracterizada por su masa y su espín, y de esta forma se ha justificado la definición de un tensor de energía-momento y otro tensor de espín, cada uno de ellos acoplado por un proceso matemático a curvatura y torsión respectivamente. Históricamente, el nacimiento de esta teoría siguió un camino ligeramente distinto. Fue Elie Cartan quién primero sugirió lo que hoy día se conoce por teleparalelismo, teoría que partiría del deseo de acoplar espín a torsión. Esto último es importante, mientras que en el último capítulo, acoplar espín con torsión era un resultado de un proceso matemático (basado en el principio de mínima acción), en este se parte con una idea clara de que la torsión va a jugar un papel fundamental en la descripción del espín en espacios curvados por la masa de la materia.

Muy probablemente, Cartan pensase en la superficie terrestre como un caso de S^2 [3], e imaginase dos brújulas en dos puntos distintos de la misma. Por acción del campo magnético terrestre, las agujas imantadas estarían obligadas a apuntar al norte geográfico, lo que permitiría suministrar una noción de paralelismo relacionada con el ángulo que formasen los vectores con los meridianos que pasasen por su dos orígenes. En una geometría como la de Cartan, los vectores que se desplazan paralelamente (a través de las líneas de los campos vectoriales que definen los Vielbein como se verá un poco más adelante) quedan a salvo de cualquier rotación. Sin embargo, si dos vectores iguales en un punto se separan, permaneciendo uno de ellos inmóvil mientras el otro describe una trayectoria cerrada, ambos quedarán finalmente paralelos, pero situados en puntos separados. Este hecho será el que mida el tensor de torsión.

Pero, ¿cómo se puede formular esta idea de paralelismo matemáticamente? La respuesta a esta pregunta se encuentra en la introducción de la geometría desde el espacio tangente, mediante el uso de unos objetos geométricos que recibirán el nombre de *Vielbein* (también llamados *tétradas* en 4-dimensiones).

6.1 Formalismo Vielbein

Se considera una variedad diferenciable \mathcal{M} y un punto p en la misma. Se puede considerar el espacio tangente en p $T_p\mathcal{M}$. En este espacio, se puede elegir entre los siguientes tipos de bases:

- **Base holónoma** (o de coordenadas): Conjunto de campos vectoriales $\{e_1, \dots, e_n\}$ definidos en p como $e_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ e interpretados, cada uno de ellos, como un desplazamiento infinitesimal desde p a lo largo de la curva coordenada x^α (coordenadas asociadas a la carta). Se puede probar que una base es holónoma, sí y solo sí, satisface $[e_\mu, e_\nu]^\rho = 0$ bajo cualquier conexión.
- **Base anholónoma**: No relacionada con ningunas coordenadas.

En general una base ortonormal no es una base holónoma. Este es precisamente el caso en este punto del trabajo. Por el Principio de Equivalencia, se puede elegir una base ortonormal, donde la métrica de Minkowsky toma la forma de $+-$ (ó $-+++$). Sin embargo, las coordenadas de la variedad a la que pertenece el punto p vienen expresados en otra base. De forma que se puede escribir el espacio tangente en cada punto con respecto a dos bases diferentes.

Llámesese $\{e_a\}$ a la base ortonormal del fibrado tangente, y $\{e_\mu\}$ a la base holónoma. A partir de ahora, los índices griegos se referirán a las coordenadas holónomas y los latinos a coordenadas anholónomas. Sea $\{e^a\}$ la base dual de la base ortonormal y $\{e^\mu\}$ la base dual de la base holónoma. Existirán cambios de bases entre las bases holónoma y ortonormal para ambos espacios, el tangente y el cotangente.

$$e_\mu = e^a{}_\mu e_a \Leftrightarrow e_a = e^\mu{}_a e_\mu \quad e^\mu = e^\mu{}_a e^a \Leftrightarrow e^a = e^a{}_\mu e^\mu$$

Estos elementos de matriz del cambio de base, $e^a{}_\mu$, son los mencionados *Vielbein* (o *tétradas* en el caso cuatro-dimensional. Nótese como la base $\{e^a\}$ no depende del punto en la variedad, esa información está implícita en el Vielbein. Esto será particularmente útil más adelante, cuando se exprese la métrica general en el fibrado (puesto que la métrica de Minkowsky será constante al expresarla en coordenadas ortonormales). Se puede ver entonces, como en cada punto se tiene que son matrices inversas la una de la otra, que:

$$e^a{}_\mu e^\mu{}_b = \delta^a_b, \quad e^\mu{}_a e^a{}_\nu = \delta^\mu_\nu \quad (6.1)$$

Se puede ahora aplicar el cambio de bases a un tensor, por ejemplo, al tensor métrico:

$$g_{\mu\nu}(x) = e^a{}_\mu(x) e^b{}_\nu(x) \eta_{ab} \quad (6.2)$$

donde $\eta_{ab} = \text{diag}(1, -1, \dots, -1)$ es el tensor métrico en coordenadas cartesianas para un espacio de D dimensiones.

Como era de esperar, los índices griegos transforman bien bajo CGC y los índices latinos bajo TLL.

$$e^a{}_\nu(y) = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu} e^a{}_\mu(x) \quad e'^a{}_\mu(x) = \Lambda^a{}_b(x) e^b{}_\mu(x) \quad (6.3)$$

6.1.1. Conexión de espín y curvatura de espín

Cuando se habló de variedades diferenciables en el capítulo 1, se discutió la necesidad de introducir un objeto geométrico con el cual derivar y que la derivada resultante transformase como un tensor ante CGC. De esta forma, se justificaba la definición de conexión y derivada covariante. Ahora se va a trabajar con TLL también, por tanto, va a ser necesario introducir un objeto geométrico que permita derivar, y que la derivada resultante transforme bien bajo este tipo de transformaciones. Sea $H^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s}$ un tensor en el fibrado tangente:

$$D_\mu H^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s} = \partial_\mu H^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s} + \omega_{\mu c}{}^a H^{c \dots a_r}_{b_1 \dots b_s} + \dots (\text{índices superiores}) \\ - \omega_{\mu b}{}^c H^{a_1 \dots a_r}_{c \dots b_s} - \dots (\text{índices inferiores}) \dots \quad (6.4)$$

donde $\omega_{\mu a}{}^b$ recibe el nombre de *conexión de espín* y cumple que, bajo CGC transforma como una 1-forma y bajo TLL $x^a \rightarrow x'^a = \Lambda^a{}_b x^b$ sigue la regla:

$$\omega_{\mu a}{}^b \rightarrow \omega'_{\mu a}{}^b = \Lambda^b{}_d (\Lambda^{-1})^c{}_a \omega_{\mu c}{}^d - (\Lambda^{-1})^c{}_a \partial_\mu \Lambda^b{}_c$$

Al igual que en el capítulo 1, conmutando derivadas covariantes se puede obtener un tensor de curvatura:

$$[D_\mu, D_\nu] H^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s} = \mathcal{R}_{\mu\nu c}{}^a H^{c \dots a_r}_{b_1 \dots b_s} + \dots (\text{índices superiores}) \dots \\ - \mathcal{R}_{\mu\nu b}{}^c H^{a_1 \dots a_r}_{c \dots b_s} - \dots (\text{índices inferiores}) \dots$$

donde no aparece un término de “torsión por derivada covariante” como aparecía con la conexión afín. $\mathcal{R}_{\mu\nu a}{}^b$ es el *tensor de curvatura de espín* y queda definido como:

$$\mathcal{R}_{\mu\nu a}{}^b := \partial_\mu \omega_{\nu a}{}^b - \partial_\nu \omega_{\mu a}{}^b - \omega_{\mu c}{}^a \omega_{\nu b}{}^c + \omega_{\nu c}{}^a \omega_{\mu b}{}^c \quad (6.5)$$

El tensor de curvatura de espín es un tensor 2-covariante sobre la variedad y (1,1) sobre el tangente.

En cuanto a sus contracciones, hay 4 contracciones independientes de 2 índices:

$$\mathcal{R}_{\nu a} \equiv \mathcal{R}^{(1)}{}_{\nu a} = e^\mu{}_b \mathcal{R}_{\mu\nu a}{}^b, \quad \mathcal{R}^{(2)}{}_\mu{}^a = e^\nu{}_c \eta^{dc} \mathcal{R}_{\mu\nu d}{}^a,$$

$$\mathcal{R}^{(3)}{}_{\mu\nu} = \mathcal{R}_{\mu\nu a}{}^a, \quad \mathcal{R}^{(4)}{}_a{}^b = g^{\mu\nu} \mathcal{R}_{\mu\nu a}{}^b \equiv 0$$

de las cuales solo $\mathcal{R}_{\nu a}$ y $\mathcal{R}^{(2)}{}_\mu{}^a$ se utilizarán en este trabajo

La única contracción total del tensor se denotará *escalar de curvatura de espín*:

$$\mathcal{R} = \eta^{ab} e^\nu{}_b e^\mu{}_c \mathcal{R}_{\mu\nu a}{}^c \quad (6.6)$$

6.1.2. Postulado de los Vielbein

Hasta este momento, se han introducido dos instrumentos derivativos distintos: la derivada covariante asociada a la conexión afín, y la derivada asociada a la conexión de espín. La primera se comporta de forma tensorial cuando se aplica a índices griegos, y la segunda cuando se aplica a índices latinos. Es de interés en la teoría, aunar los buenos comportamientos de ambos objetos en una sola derivada, que se denotará *derivada completamente covariante*, y que preserva el carácter tensorial de cualquier objeto geométrico al que se aplique.

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\rho H^{\mu\dots a\dots}_{\nu\dots b\dots} &= \partial_\rho H^{\mu\dots a\dots}_{\nu\dots b\dots} + \\ &\Gamma^\mu_{\rho\sigma} H^{\sigma\dots a\dots}_{\nu\dots b\dots} + \dots(\text{índices griegos superiores})\dots - \\ &\Gamma^\sigma_{\rho\nu} H^{\mu\dots a\dots}_{\sigma\dots b\dots} - \dots(\text{índices griegos inferiores})\dots + \\ &\omega_{\rho c}{}^a H^{\sigma\dots c\dots}_{\sigma\dots b\dots} + \dots(\text{índices latinos superiores})\dots - \\ &\omega_{\rho b}{}^c H^{\sigma\dots a\dots}_{\sigma\dots c\dots} - \dots(\text{índices latinos inferiores})\dots \end{aligned}$$

Como se quiere describir el mismo universo, tanto con la conexión afín como con la de espín, tiene que haber algún puente entre ambas descripciones. Este puente vendría dado por la ligadura que impone el *postulado de los Vielbein*.

Postulado de los Vielbein

La derivada completamente covariante de los Vielbein es nula:

$$(VP) \quad \equiv \quad \mathcal{D}_\mu e^\lambda_a = 0 \quad (6.7)$$

Es inmediato probar la equivalencia entre el postulado y:

$$\omega_{\mu a}{}^b = \Gamma^\rho_{\mu\nu} e^\nu_a e^b_\rho - e^\nu_a \partial_\mu e^b_\nu, \quad \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = e^a_\nu e^\lambda_b \omega_{\mu a}{}^b + e^\lambda_b \partial_\mu e^b_\nu. \quad (6.8)$$

Y por tanto la relación entre tensores de curvatura es:

$$\mathcal{R}_{\mu\nu a}{}^b = e^\rho_a e^b_\lambda R_{\mu\nu\rho}{}^\lambda \equiv R_{\mu\nu\rho}{}^b, \quad (6.9)$$

de la cual se deduce que:

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} \equiv e^a_\nu \mathcal{R}_{\mu a} = R_{\mu\nu}, \quad \mathcal{R} = R \quad (6.10)$$

Por tanto, a partir de ahora no será necesario distinguir entre \mathcal{R}' s y R' s.

6.1.3. El postulado de los Vielbein visto como un cambio general de coordenadas

Para un CGC arbitrario es conocido que la conexión no transforma como un tensor. Sin embargo, la derivada covariante si que lo hace. De este hecho se puede deducir como cambia la conexión:

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\eta}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\gamma} \Gamma^\gamma_{\rho\eta}(x) \quad (6.11)$$

Si los Vielbein se interpretan como matrices de cambios de coordenadas locales entre las coordenadas de la variedad y las del plano tangente, entonces, considerando una conexi3n Γ_{ca}^b , con 3ndices latinos y, por tanto, definida en el plano tangente, se tiene que:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial x^c}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^a}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^b} \Gamma_{ca}^b(x) = e^a{}_\nu e^\lambda{}_b \omega_{\mu a}{}^b + e^\lambda{}_b \partial \delta_\mu^b e^b{}_\nu \quad (6.12)$$

Que es la misma expresi3n que se obtuvo a partir del postulado de los Vielbein.

6.2 Teleparalelismo

Ahora que se ha introducido la teor3a matemática necesaria para este cap3tulo, se procede a aplicar el formalismo de Palatini. A diferencia de los cap3tulos 1 y 2, en este cap3tulo los campos independientes a partir de los cuales se plantearán las ecuaciones de Euler serán los Vielbein (que llevan toda la informaci3n sobre la m3trica de la variedad), y la conexi3n de esp3n.

6.2.1. Formalismo de Palatini desde el espacio tangente

Se parte de la acci3n correspondiente a una conexi3n general,

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int R(e, \omega) \sqrt{|g|} d^4x + \int \mathcal{L}_{mat}(\chi, g, \Gamma) \sqrt{|g|} d^4x$$

Se puede empezar a expresar en t3rminos del tangente como:

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int e^\nu{}_d e^\gamma{}_c \eta^{cf} R_{\nu\gamma f}{}^d(\omega) \sqrt{|g|} d^4x + \int \mathcal{L}_{mat}(\chi, e, \omega) \sqrt{|g|} d^4x$$

Aún faltar3a $\sqrt{|g|}$. Basta con tomar determinantes en $g_{\mu\nu} = e^a{}_\mu e^b{}_\nu \eta_{ab}$, y teniendo en cuenta que $\det \eta = \text{sgn}(\det g)$ se tiene:

$$|e| = \sqrt{|g|}$$

y finalmente la acci3n en el espacio tangente resulta:

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int e^\nu{}_d e^\gamma{}_c \eta^{cf} R_{\nu\gamma f}{}^d(\omega) |e| d^4x + \int \mathcal{L}_{mat}(\chi, e, \omega) |e| d^4x$$

6.2.2. Ecuaci3n para los Vielbein

Aplicando el principio de m3nima acci3n con respecto a variaciones de los Vielbein:

$$\frac{\partial (e^\nu{}_d e^\gamma{}_c \eta^{cf} R_{\nu\gamma f}{}^d(\omega) |e|)}{\partial e^\mu{}_a} = \frac{\partial (\mathcal{L}_{mat}(\chi, e, \omega) |e|)}{\partial e^\mu{}_a}$$

Resolviendo (Ap3ndice C), se llega a que, con los campos y conexi3n *on shell*, las ecuaciones de Einsteins desde el tangente coinciden con las usuales:

$$R_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa \tau_{\mu\nu} \quad (6.13)$$

6.2.3. Ecuación para la conexión de espín

La derivación se realizará en primer lugar en ausencia de campos, luego solo se considera la acción Einstein-Hilbert. Los detalles aparecen en el apéndice D.

En ausencia de campos, se obtiene la ecuación 6.14

$$0 = \eta^{bc} \left[e^\mu{}_c e^\nu{}_a T_{\nu\tau}^\tau + e^\nu{}_c e^\lambda{}_a T_{\lambda\nu}^\mu - e^\mu{}_a e^\nu{}_c T_{\nu\tau}^\tau \right] \quad (6.14)$$

Análogamente a lo que se hizo en el capítulo de gravedad de Einstein-Cartan, considerando la presencia de campos de materia se obtiene la ecuación de campo asociada a la conexión de espín D.1:

$$\eta^{bc} \left[e^\mu{}_c e^\nu{}_a T_{\nu\tau}^\tau + e^\nu{}_c e^\lambda{}_a T_{\lambda\nu}^\mu - e^\mu{}_a e^\nu{}_c T_{\nu\tau}^\tau \right] = -\kappa s^\mu{}_a{}^b \quad (6.15)$$

donde se ha definido como tensor de espín,

$$s^\mu{}_a{}^b = \frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial(\sqrt{|g|} \mathcal{L}_{mat}(\chi, e, \omega))}{\partial \omega_\mu{}^a{}_b}$$

Se puede comprobar que D.1 y 4.4 son equivalentes.

Capítulo 7

Conclusiones

7.1 Conclusiones

Se ha explorado una de las formas alternativas de describir a la gravedad, anulando la condición impuesta por la Relatividad General de que la torsión es nula. Para facilitar su comprensión al lector ajeno al tema, se hace un repaso de la construcción de la Relatividad General, y se toma como ejemplo para la construcción de la gravedad de Einstein-Cartan.

Para ello, en primer lugar se justifica el uso de la herramienta matemática, las variedades diferenciables, a través del Principio de Equivalencia, para la descripción del *espaciotiempo*. Por sí sola, la estructura de variedad diferenciable no es suficiente para poder hacer una física completa. Para poder describir movimientos son necesarios conceptos como distancia, velocidad, aceleración, etc. Derivadas con carácter vectorial que es interesante poder comparar en distintos puntos del espacio. Con este fin, dos objetos geométricos de especial importancia son introducidos: la métrica y la conexión. La métrica va a estar relacionada con la forma de medir distancias y ángulos sobre un punto de la variedad. De alguna forma, se puede decir que dota de Geometría a la variedad en ese punto. La conexión por su parte, va a definir como se relacionan las geometrías de los distintos puntos de la variedad. A partir de la conexión se van a poder definir los conceptos de curvatura y torsión, que más adelante juegan un papel fundamental en el trabajo.

En este momento del desarrollo matemático ya se puede hacer física, y es en el punto donde van a separarse Relatividad General y gravedad de Einstein-Cartan. Y es que, para tener una descripción completa del *espaciotiempo*, es necesario calcular la métrica y la conexión que lo describen. La Relatividad General de Einstein va a trabajar con una conexión en particular que depende directamente de la métrica, por tanto calculando métrica, calculas conexión. El nombre de esta conexión es conexión de Levi-Civita, y su forma analítica surge de forma natural de considerar dos condiciones:

- *Compatibilidad de la métrica:* $\nabla_\lambda(g_{\mu\nu}) = 0$
- *Torsión nula:* $T = 0$

La forma de construir las dos teorías es el mismo, pero la gravedad de Einstein-Cartan se

construye sin apoyarse en una torsión nula, con lo que la conexión ya no es la de Levi-Civita y por tanto analíticamente ya no depende directamente de la métrica. Es decir, métrica y conexión son campos independientes.

Para la construcción de la teoría se recurre al uso de un formalismo variacional, por tanto es necesario la introducción de una acción. En estas teorías, la acción es el resultado de la suma de una acción gravitatoria y otra acción material. Es importante señalar que en ambas teorías la acción gravitatoria es la de Einstein-Hilbert, por tanto, aún a pesar de englobarse en el marco de teorías de gravedad modificada, Einstein-Cartan se diferencia del resto en que no modifica la acción gravitatoria con respecto a la de Relatividad General.

En cuanto al formalismo variacional, se denomina Formalismo de Palatini, y va a fundamentarse en aplicar el Principio de Mínima Acción a una acción que dependa de forma independiente de métrica y conexión, por lo cual es natural utilizarlo en gravedad de Einstein-Cartan (en el trabajo se justifica como también es necesario para Relatividad General, pero puesto que en esta métrica y conexión son dependientes el argumento es algo más complicado). Para gravedad de Einstein-Cartan la acción es (la única diferencia con la de Relatividad General es que el lagrangiano de materia depende de la conexión):

$$S = S_{EH} + S_{mat} = \frac{1}{2\kappa} \int R(g, \Gamma) \sqrt{|g|} d^4x + \int \mathcal{L}_{mat}(\chi, g, \Gamma) \sqrt{|g|} d^4x$$

Aplicar el Formalismo de Palatini tiene como resultado la obtención de dos ecuaciones de campo, una para la métrica y otra para la conexión, cada una relacionando un objeto geométrico con un aspecto físico de la materia.

La primera ecuación de campo es la misma para Relatividad General y para gravedad de Einstein-Cartan. Relaciona curvatura y tensor de energía-momento:

$$R_{\gamma\rho} - \frac{1}{2} R g_{\gamma\rho} = \kappa \tau_{\gamma\rho}$$

La segunda ecuación de campo se anula en Relatividad General, y relaciona torsión y tensor de espín:

$$g_{\gamma\rho} T^\nu{}_{\lambda\nu} + T_{\rho\gamma\lambda} + g_{\rho\lambda} T^\nu{}_{\nu\gamma} = -\kappa s_{\rho\gamma\lambda}$$

Esta segunda ecuación es la característica de gravedad de Einstein-Cartan. El tensor de espín es nulo en Relatividad General, con lo que la torsión es cero, y se recupera la conexión de Levi-Civita. Para justificar el acople de estas ecuaciones, se han utilizado argumentos de teoría de campos. La materia macroscópica está formada por partículas elementales que, al menos localmente, responden a la teoría cuántica de campos y a la relatividad especial, por tanto, cada partícula elemental se puede etiquetar con masa/energía y momento angular intrínseco (espín). Si la materia va a imponer una geometría sobre el espacio en este modelo, tiene sentido que cada una de las características que la definen se acople con un elemento geométrico. En el caso de Relatividad General, se consideran distribuciones de materia con un espín promediado a 0, con lo que solo es necesario un tensor de energía-momento para la descripción del *espaciotiempo*. Sin embargo, si el promedio de espín no es nulo, la gravedad de Einstein-Cartan propociona una descripción geométrica más acertada, pues además de ligar curvatura y energía-momento, liga torsión y espín.

Las ecuaciones obtenidas mediante el Formalismo de Palatini se han aunado en una sola ecuación de campo:

$$G^{\{\mu\lambda\}} = \kappa \tau^{\mu\lambda} + \frac{1}{2} \kappa^2 \left(s^{\mu\rho}{}_{\rho} s^{\lambda\nu}{}_{\nu} - s^{\mu\rho}{}_{\nu} s^{\lambda\nu}{}_{\rho} - s^{\mu\rho\nu} s^{\lambda}{}_{\rho\nu} + \right. \\ \left. \frac{1}{2} s^{\rho\nu\mu} s_{\rho\nu}{}^{\lambda} + \frac{1}{4} g^{\mu\lambda} (2 s_{\rho}{}^{\nu}{}_{\sigma} s^{\rho\sigma}{}_{\nu} - 2 s_{\rho}{}^{\nu}{}_{\nu} s^{\rho\sigma}{}_{\sigma} + s^{\rho\nu\sigma} s_{\nu\sigma}) \right)$$

Para resolverla se utiliza el marco cosmológico, donde se supone que a gran escala, nuestro Universo se trata de un fluido homogéneo e isótropo. Estas simetrías espaciales simplifican notablemente la ecuación de campo. Con ellas, y suponiendo un Universo cerrado, se plantea el análogo a la ecuaciones de Friedman de Relatividad General pero para el caso de gravedad de Einstein-Cartan.

$$\begin{aligned} 00 : \quad & -3 \frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\kappa}{2} \left(\epsilon + 3p + \frac{1}{2} \kappa s^2 \right) \\ ij : \quad & 2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2}{a^2} = -\kappa \left(p - \frac{1}{4} \kappa s^2 \right) \end{aligned}$$

Con ellas se abordan los dos problemas que motivan la inflación en cosmología estándar: la planitud y el horizonte. El primero, el problema de la *planitud*, viene generado por la mediciones que indican la naturaleza plana del Universo, y como esto choca con la edad y tamaño del mismo. Al ritmo de crecimiento de un Universo plano, resulta imposible haber alcanzado el tamaño actual del Universo en su tiempo de vida. Por otra parte, el problema del *horizonte* viene dado por las observaciones realizadas al CMB (Cosmic Microwave Background). Estadísticamente, existe una simetría en la temperatura de puntos antipodales en el Universo. Nuevamente, dada la localización de estos puntos, en la edad del Universo y por su velocidad de expansión, se genera una incoherencia, en este caso el hecho de que estos puntos no pueden haber estado en contacto en ningún momento de la historia.

La Inflación da cuenta de ambos problemas, teorizando una expansión acelerada en los primeros instantes del Universo (lo que involucra vacíos falsos o campos escalares), que acabaría por estabilizarse a la expansión que se observa en el presente.

Se prueba como el término del factor de densidad energética derivado del fluido de espín en teoría de Einstein-Cartan, a edades tempranas del Universo, es suficiente como para dar cuenta de ambos problemas sin necesidad de recurrir a teorías inflacionarias.

Además se incluye un capítulo dedicado al teleparalelismo, que no es sino una reformulación de la teoría desde el espacio tangente. Se ha decidido incluir este capítulo por razones históricas, y porque sirve como base para la introducción de un lagrangiano de materia, el del campo de Dirac, en espacios curvos.

7.2 Trabajo futuro

Por extensión, por dificultad, y por tiempo, algunos apartados relativos a la teoría se han omitido.

- *Estudio detallado del tensor de Belifante-Rosenfeld y su uso en gravedad de Einstein-Cartan.*

Una tarea pendiente para el desarrollo completo de la teoría sería la reproducción exacta de los cálculos que llevan a este tensor.

- *Geometría de Einstein-Cartan como resultado natural de una teoría gauge local para el grupo de Poincare en el espaciotiempo [4].*

Se puede demostrar, desde la perspectiva de una teoría de Campos, que la geometría propia de la gravedad de Einstein-Cartan en cierto modo es más natural que la de Relatividad General, pues es el resultado natural de una teoría gauge local para el grupo de Poincare en el *espaciotiempo*.

- *Estudio detallado del teleparalelismo, su uso con el campo de Dirac [3] [5].*

En primer lugar, no se ha incluido la expresión analítica del lagrangiano de materia del campo de Dirac en espacios curvos porque para defenderla era necesario explicar conceptos propios de Teoría Cuántica de Campos. Por lo tanto queda pendiente para trabajos futuros.

En segundo lugar, queda pendiente un estudio más detallado sobre el teleparalelismo en general, y su incorporación a la teorías posteriores como la supergravedad [3]. Por complejidad también se deja como vías futuras.

Apéndice A

Ecuación para la métrica

Se parte pues, utilizando el formalismo métrico y la acción:

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int R(g) \sqrt{|g|} d^4x + \int \mathcal{L}_{mat}(\chi, g) \sqrt{|g|} d^4x$$

Efectuando una variación con respecto a la métrica $g^{\mu\nu} \rightarrow g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu}$ y aplicando el principio de mínima acción:

$$\delta S = \int \left[\frac{1}{2\kappa} \delta \left(\sqrt{|g|} R(g) \right) + \delta \left(\sqrt{|g|} \mathcal{L}_{mat}(\chi, g) \right) \right] d^4x = 0$$

Y se tiene entonces:

$$\frac{1}{2\kappa} \delta \left(\sqrt{|g|} R(g) \right) = -\delta \left(\sqrt{|g|} \mathcal{L}_{mat}(\chi, g) \right)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes:

$$\frac{1}{2\kappa} \left[\frac{\partial(R(g) \sqrt{|g|})}{\partial g^{\gamma\rho}} - \partial_\eta \left(\frac{\partial(R(g) \sqrt{|g|})}{\partial(\partial_\eta g^{\gamma\rho})} \right) \right] = - \frac{\partial(\sqrt{|g|} \mathcal{L}_{mat}(\chi, g))}{\partial g^{\gamma\rho}}$$

Teniendo en cuenta que el escalar de Ricci es:

$$R = g^{\mu\lambda} (\partial_\mu \Gamma^\nu_{\nu\lambda} - \partial_\nu \Gamma^\nu_{\mu\lambda} + \Gamma^\nu_{\mu\sigma} \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} - \Gamma^\nu_{\mu\lambda} \Gamma^\sigma_{\nu\sigma})$$

es decir, es cuadrático y de primer orden en los símbolos de Christoffel, y que estos a su vez son cuadráticos y de primer orden en la métrica:

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} (\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu})$$

se tiene que el término de las ecuaciones de Euler-Lagrange,

$$\partial_\eta \left(\frac{\partial(R(g) \sqrt{|g|})}{\partial(\partial_\eta g^{\gamma\rho})} \right)$$

es de cuarto orden. Por lo tanto, a pesar de que teóricamente este formalismo es el adecuado para la derivación de las ecuaciones de Einstein en Relatividad General, en la práctica resulta no ser un método viable. Resulta que el truco que se utiliza para esta derivación, es

precisamente “olvidarse” de que la conexión y la métrica están ligadas, y tratarlas como campos independientes. Es decir, se aplica el formalismo de Palatini.

Se parte de la acción propia de la Relatividad General:

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int R(g, \Gamma) \sqrt{|g|} d^4x + \int \mathcal{L}_{mat}(\chi, g) \sqrt{|g|} d^4x$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para la métrica son las mismas que las obtenidas con el formalismo métrico:

$$\frac{1}{2\kappa} \left[\frac{\partial(R(g, \Gamma) \sqrt{|g|})}{\partial g^{\gamma\rho}} - \partial_\eta \left(\frac{\partial(R(g, \Gamma) \sqrt{|g|})}{\partial(\partial_\eta g^{\gamma\rho})} \right) \right] = - \frac{\partial(\sqrt{|g|} \mathcal{L}_{mat}(\chi, g))}{\partial g^{\gamma\rho}}$$

En este formalismo, R no depende de las derivadas de la métrica, luego las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes a la acción de Einstein-Hilbert se simplifican notablemente:

$$\frac{1}{2\kappa} \frac{\partial(R(g, \Gamma) \sqrt{|g|})}{\partial g^{\gamma\rho}} = \frac{1}{2\kappa} \left[\sqrt{|g|} \frac{\partial(g^{\mu\lambda} R_{\mu\lambda}(g, \Gamma))}{\partial g^{\gamma\rho}} + R(g, \Gamma) \frac{\partial(\sqrt{|g|})}{\partial g^{\gamma\rho}} \right]$$

Una vez derivados, se puede omitir la dependencia del tensor y el escalar de Ricci:

$$= \frac{1}{2\kappa} \left[\sqrt{|g|} \delta_\gamma^\mu \delta_\rho^\lambda R_{\mu\lambda} + R(-\frac{1}{2} g_{\gamma\rho} \sqrt{|g|}) \right] = \frac{1}{2\kappa} \sqrt{|g|} \left[R_{\gamma\rho} - \frac{1}{2} R g_{\gamma\rho} \right]$$

$$\frac{1}{2\kappa} \sqrt{|g|} \left[R_{\gamma\rho} - \frac{1}{2} R g_{\gamma\rho} \right] = - \frac{\partial(\sqrt{|g|} \mathcal{L}_{mat}(\chi, g))}{\partial g^{\gamma\rho}}$$

Definiendo como *tensor de energía-momento*:

$$\tau_{\gamma\rho} = \frac{-2}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial(\sqrt{|g|} \mathcal{L}_{mat}(\chi, g))}{\partial g^{\gamma\rho}}$$

Se obtiene la expresión final para las ecuaciones de Einstein propias de Relatividad General:

$$R_{\gamma\rho} - \frac{1}{2} R g_{\gamma\rho} = \kappa \tau_{\gamma\rho} \quad (\text{A.1})$$

Se suele definir un tensor para la parte izquierda de la ecuación, *el tensor de Einstein* $G_{\gamma\rho}$:

$$G_{\gamma\rho} = R_{\gamma\rho} - \frac{1}{2} R g_{\gamma\rho}$$

y las ecuaciones de Einstein quedan:

$$G_{\gamma\rho} = \kappa \tau_{\gamma\rho}$$

Apéndice B

Ecuación para la conexión

Se considera en primer lugar la acción en ausencia de campos de materia, es decir, la acción de Einstein-Hilbert:

$$S_{EH} = \frac{1}{2\kappa} \int R(g, \Gamma) \sqrt{|g|} d^4x$$

donde el escalar de Ricci es:

$$R = g^{\nu\lambda} (\partial_\mu \Gamma^\mu_{\nu\lambda} - \partial_\nu \Gamma^\mu_{\mu\lambda} + \Gamma^\mu_{\mu\sigma} \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} - \Gamma^\mu_{\nu\sigma} \Gamma^\sigma_{\mu\lambda})$$

De momento, se considera una conexión general $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ con respecto a la cual se varía la acción. Las ecuaciones de Euler correspondientes resultan ser:

$$\frac{\partial(R(g, \Gamma) \sqrt{|g|})}{\partial \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}} = \partial_\eta \left(\frac{\partial(R(g, \Gamma) \sqrt{|g|})}{\partial (\partial_\eta \Gamma^\gamma_{\alpha\beta})} \right) \quad (\text{B.1})$$

Operando el lado izquierdo de la igualdad B.1:

$$\begin{aligned} \sqrt{|g|} g^{\mu\lambda} \frac{\partial [\partial_\mu \Gamma^\mu_{\nu\lambda} - \partial_\nu \Gamma^\mu_{\mu\lambda} + \Gamma^\mu_{\mu\sigma} \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} - \Gamma^\mu_{\nu\sigma} \Gamma^\sigma_{\mu\lambda}]}{\partial \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}} = \\ \frac{1}{2k} \sqrt{|g|} g^{\nu\lambda} \left[\delta^\mu_\alpha \delta^\sigma_\beta \delta^\mu_\gamma \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} + \delta^\nu_\alpha \delta^\lambda_\beta \delta^\sigma_\gamma \Gamma^\mu_{\mu\sigma} - \delta^\nu_\alpha \delta^\sigma_\beta \delta^\mu_\gamma \Gamma^\sigma_{\mu\lambda} - \delta^\mu_\alpha \delta^\lambda_\beta \delta^\sigma_\gamma \Gamma^\mu_{\nu\sigma} \right] = \\ \frac{1}{2k} \sqrt{|g|} g^{\nu\lambda} \left[\delta^\alpha_\gamma \Gamma^\beta_{\nu\lambda} + \delta^\alpha_\nu \delta^\beta_\lambda \Gamma^\mu_{\mu\gamma} - \delta^\alpha_\nu \Gamma^\beta_{\gamma\lambda} - \delta^\lambda_\beta \Gamma^\alpha_{\nu\gamma} \right] = \\ \frac{1}{2k} \sqrt{|g|} \left[g^{\nu\lambda} \delta^\alpha_\gamma \Gamma^\beta_{\nu\lambda} + g^{\alpha\beta} \Gamma^\mu_{\mu\gamma} - g^{\alpha\lambda} \Gamma^\beta_{\gamma\lambda} - g^{\nu\beta} \Gamma^\alpha_{\nu\gamma} \right] \end{aligned}$$

y el lado derecho de B.1:

$$\begin{aligned} \partial_\eta \left[\frac{1}{2k} \sqrt{|g|} g^{\nu\lambda} \frac{\partial [\partial_\mu \Gamma^\mu_{\nu\lambda} - \partial_\nu \Gamma^\mu_{\mu\lambda} + \Gamma^\mu_{\mu\sigma} \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} - \Gamma^\mu_{\nu\sigma} \Gamma^\sigma_{\mu\lambda}]}{\partial (\partial_\eta \Gamma^\gamma_{\alpha\beta})} \right] = \\ \partial_\eta \left[\frac{1}{2k} \sqrt{|g|} g^{\nu\lambda} \left(\delta^\eta_\mu \delta^\mu_\gamma \delta^\alpha_\nu \delta^\beta_\lambda - \delta^\eta_\nu \delta^\mu_\gamma \delta^\alpha_\mu \delta^\beta_\lambda \right) \right] = \partial_\eta \left[\frac{1}{2k} \sqrt{|g|} \left(g^{\alpha\beta} \delta^\gamma_\eta - g^{\eta\beta} \delta^\gamma_\alpha \right) \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2k} \left[\left(\partial_\eta \sqrt{|g|} \right) \left(g^{\alpha\beta} \delta_\eta^\gamma - g^{\eta\beta} \delta_\alpha^\gamma \right) + \sqrt{|g|} \left(\partial_\gamma g^{\alpha\beta} - \partial_\eta g^{\eta\beta} \delta_\alpha^\gamma \right) \right] = \\ \frac{1}{2k} \sqrt{|g|} \left[g^{\alpha\beta} \Gamma_{\eta\rho}^\rho \delta_\eta^\gamma - g^{\eta\beta} \Gamma_{\eta\rho}^\rho \delta_\alpha^\gamma + \partial_\gamma g^{\alpha\beta} - \partial_\eta g^{\eta\beta} \delta_\alpha^\gamma \right] \end{aligned}$$

Asumiendo por simplicidad la compatibilidad de la métrica ($\nabla_\eta g^{\mu\lambda} = 0 = \partial_\eta g^{\mu\lambda} + \Gamma_{\eta\rho}^\mu g^{\rho\lambda} + \Gamma_{\eta\rho}^\lambda g^{\mu\rho}$), es posible escribir B.1 como:

$$\begin{aligned} 0 = g^{\mu\lambda} \delta_\alpha^\gamma \Gamma_{\mu\lambda}^\beta + g^{\alpha\beta} \Gamma_{\nu\gamma}^\nu - g^{\alpha\lambda} \Gamma_{\gamma\lambda}^\beta - g^{\mu\beta} \Gamma_{\mu\gamma}^\alpha + g^{\eta\beta} \Gamma_{\eta\rho}^\rho \delta_\alpha^\gamma - \\ g^{\alpha\beta} \Gamma_{\gamma\rho}^\rho - \Gamma_{\eta\rho}^\eta g^{\rho\beta} \delta_\alpha^\gamma - \Gamma_{\eta\rho}^\beta g^{\eta\rho} \delta_\alpha^\gamma + \Gamma_{\gamma\rho}^\alpha g^{\rho\beta} + \Gamma_{\gamma\rho}^\beta g^{\alpha\rho} \end{aligned}$$

Reagrupando y renombrando índices contraídos, se puede simplificar esta expresión utilizando el tensor de torsión:

$$\begin{aligned} 0 = g^{\mu\beta} \delta_\alpha^\gamma (\Gamma_{\mu\nu}^\nu - \Gamma_{\nu\mu}^\nu) + g^{\mu\beta} (\Gamma_{\gamma\mu}^\alpha - \Gamma_{\mu\gamma}^\alpha) + g^{\alpha\beta} (\Gamma_{\nu\gamma}^\nu - \Gamma_{\gamma\nu}^\nu) = \\ g^{\mu\beta} \delta_\alpha^\gamma T_{\mu\nu}^\nu + g^{\mu\beta} T_{\gamma\mu}^\alpha + g^{\alpha\beta} T_{\nu\gamma}^\nu \end{aligned} \tag{B.2}$$

Apéndice C

Ecuación para los Vielbeins

Aplicando el principio de mínima acción con respecto a variaciones de los Vielbein se obtiene:

$$\frac{\partial (e^\nu_d e^\gamma_c \eta^{cf} R_{\nu\gamma f}{}^d(\omega)|e|)}{\partial e^\mu_a} = \frac{\partial (\mathcal{L}_{mat}(\chi, e, \omega)|e|)}{\partial e^\mu_a}$$

Por la parte de la acción gravitatoria, se tiene la derivada de un producto. Por un lado,

$$\frac{\partial (e^\nu_d e^\gamma_c)}{\partial e^\mu_a} = \delta^\nu_\mu \delta^a_c e^\gamma_c + \delta^\gamma_\mu \delta^a_c e^\nu_d$$

y por otro

$$\frac{\partial |e|}{\partial e^\mu_a} = \text{sgn}(e) \frac{\partial e}{\partial e^\mu_a} = -\text{sgn}(e) e e^\mu_a = -|e| e^\mu_a$$

donde se ha utilizado en la penúltima igualdad la propiedad de las matrices inversibles:

$$\frac{\partial \det A}{\partial (A^{-1})^i_j} = -(\det A) A^j_i$$

Por otro lado, definiendo como tensor de energía-momento con respecto al vielbein a

$$t_{\mu d} = \frac{-1}{|e|} \eta_{ad} \frac{\partial (|e| \mathcal{L}_{mat})}{\partial e^\mu_a}$$

De manera que se cumple la igualdad

$$(\delta^\nu_\mu \delta^a_d e^\gamma_c + \delta^\gamma_\mu \delta^a_c e^\nu_d) \eta^{cf} R_{\nu\gamma f}{}^d(\omega)|e| + e^\nu_d e^\gamma_c \eta^{cf} R_{\nu\gamma f}{}^d(\omega)(-|e| e^a_\mu) = 2\kappa \frac{1}{\eta_{ad}} t_{\mu a}$$

Multiplicando por η_{ad} y desarrollando se llega a [5]:

$$\frac{1}{2} (R_{\mu d} - R_{\mu d}^{(2)}) - \frac{1}{2} \eta_{ad} e^a_\mu R = \kappa t_{\mu a}$$

Para recuperar las ecuaciones de Einstein en coordenadas de la variedad, se impone el postulado de los Vielbein. Contrayendo con e^d_ν se obtiene:

$$\frac{1}{2} (R_{\mu\nu} - R_{\mu\nu}^{(2)}) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa t_{\mu\nu}$$

Por último, faltaría matizar como deben estar los campos para que las ecuaciones de Einstein desde el tangente coincidan con las usuales. Para recuperarlas definitivamente, se va a exigir que tanto los campos como la conexión estén *on-shell* (que satisfagan las ecuaciones clásicas de movimiento por estar en el espacio tangente). De esta forma se consigue que

$$\frac{1}{2} \left(R_{\mu\nu} - R_{\mu\nu}^{(2)} \right) = R_{(\mu\nu)}$$

y que

$$(t_{\mu\nu})_{on-shell} = \tau_{\mu\nu}$$

Esta última igualdad viene dada porque es justamente la parte simétrica de $t_{\mu\nu}$ la que coincide con $\tau_{\mu\nu}$:

$$t_{(\mu\nu)} = e^a{}_{\nu} \eta_{ab} \frac{\partial \mathcal{L}_{mat}}{e^{\mu}{}_b} + e^a{}_{\mu} \eta_{ab} \frac{\partial \mathcal{L}_{mat}}{e^{\nu}{}_b} - g_{\mu\nu} \mathcal{L}_{mat} = 2 \frac{\partial \mathcal{L}_{mat}}{\partial g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu} \mathcal{L}_{mat} = \tau_{\mu\nu}$$

Por tanto, con los campos y conexión *on shell*, las ecuaciones de Einsteins desde el tangente coinciden con las usuales:

$$R_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa \tau_{\mu\nu} \tag{C.1}$$

Apéndice D

Ecuación para la conexión de espín

La derivación se realizará en primer lugar en ausencia de campos, luego solo se considera la acción Einstein-Hilbert. Como el elemento de volumen de la acción, no depende de la conexión de espín, las ecuaciones Euler se pueden formular en términos de la densidad lagrangiana.

$$\frac{\partial L_{EH}}{\partial \omega_{\mu}^a{}_b} = \partial_{\lambda} \left(\frac{\partial L_{EH}}{\partial (\delta_{\lambda} \omega_{\mu}^a{}_b)} \right)$$

Puesto que el lagrangiano de Einstein-Hilbert tiene la forma

$$L_{EH} = \frac{1}{2\kappa} e^{\nu}{}_d e^{\gamma}{}_c \eta^{cf} R_{\nu\gamma f}{}^d(\omega)$$

y el tensor de curvatura de espín es:

$$R_{\nu\gamma}{}^d{}_f = \partial_{\nu} \omega_{\gamma}{}^d{}_f - \partial_{\gamma} \omega_{\nu}{}^d{}_f + \omega_{\nu}{}^d{}_g \omega_{\gamma}{}^g{}_f - \omega_{\gamma}{}^d{}_g \omega_{\nu}{}^g{}_f$$

se tiene que las ecuaciones de Euler resultan ser:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \omega_{\mu}^a{}_b} \left[\frac{|e|}{2k} e^{\nu}{}_d e^{\gamma}{}_c \eta^{cf} \left(\partial_{\nu} \omega_{\gamma}{}^d{}_f - \partial_{\gamma} \omega_{\nu}{}^d{}_f + \omega_{\nu}{}^d{}_g \omega_{\gamma}{}^g{}_f - \omega_{\gamma}{}^d{}_g \omega_{\nu}{}^g{}_f \right) \right] = \\ & \partial_{\lambda} \left[\frac{\partial}{\partial (\delta_{\lambda} \omega_{\mu}^a{}_b)} \left[\frac{|e|}{2k} e^{\nu}{}_d e^{\gamma}{}_c \eta^{cf} \left(\partial_{\nu} \omega_{\gamma}{}^d{}_f - \partial_{\gamma} \omega_{\nu}{}^d{}_f + \omega_{\nu}{}^d{}_g \omega_{\gamma}{}^g{}_f - \omega_{\gamma}{}^d{}_g \omega_{\nu}{}^g{}_f \right) \right] \right] \end{aligned}$$

Desarrollando ambos lados de la igualdad se tiene:

1. *Lado izquierdo:*

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \omega_{\mu}^a{}_b} \left[\frac{|e|}{2k} e^{\nu}{}_d e^{\gamma}{}_c \eta^{cf} \left(\partial_{\nu} \omega_{\gamma}{}^d{}_f - \partial_{\gamma} \omega_{\nu}{}^d{}_f + \omega_{\nu}{}^d{}_g \omega_{\gamma}{}^g{}_f - \omega_{\gamma}{}^d{}_g \omega_{\nu}{}^g{}_f \right) \right] = \\ & \frac{|e|}{2k} e^{\nu}{}_d e^{\gamma}{}_c \eta^{cf} \left(\delta_{\nu}^{\mu} \delta_a^d \delta_g^b \omega_{\gamma}{}^g{}_f + \delta_{\gamma}^{\mu} \delta_a^g \delta_f^b \omega_{\nu}{}^d{}_g - \delta_{\gamma}^{\mu} \delta_a^d \delta_g^b \omega_{\nu}{}^g{}_f - \delta_{\nu}^{\mu} \delta_a^g \delta_f^b \omega_{\gamma}{}^d{}_g \right) = \\ & \frac{|e|}{2k} \left[e^{\nu}{}_a e^{\gamma}{}_c \eta^{cf} \omega_{\gamma}{}^b{}_f + e^{\nu}{}_d e^{\mu}{}_c \eta^{cb} \omega_{\nu}{}^d{}_a - e^{\nu}{}_a e^{\mu}{}_c \eta^{cf} \omega_{\nu}{}^d{}_a - e^{\mu}{}_d e^{\gamma}{}_c \eta^{bc} \omega_{\gamma}{}^d{}_a \right] \end{aligned}$$

2. Lado derecho:

$$\begin{aligned} & \partial_\lambda \left[\frac{\partial}{\partial(\partial_\lambda \omega_\mu^a{}_b)} \left[\frac{|e|}{2k} e^\nu{}_d e^\gamma{}_c \eta^{cf} \left(\partial_\nu \omega_\gamma^d{}_f - \partial_\gamma \omega_\nu^d{}_f + \omega_\nu^d{}_g \omega_\gamma^g{}_f - \omega_\gamma^d{}_g \omega_\nu^g{}_f \right) \right] \right] = \\ & \partial_\lambda \left[\frac{|e|}{2k} e^\nu{}_d e^\gamma{}_c \eta^{cf} \left(\partial_\nu^\lambda \partial_\gamma^\mu \partial_a^d \partial_f^b - \partial_f^\lambda \partial_\nu^\mu \partial_a^d \partial_f^b \right) \right] = \partial_\lambda \left[\frac{|e|}{2k} \left(e^\lambda{}_a e^\mu{}_c \eta^{bc} - e^\mu{}_a e^\lambda{}_c \eta^{cb} \right) \right] = \\ & \frac{1}{2k} (\partial_\lambda |e|) \left(e^\lambda{}_a e^\mu{}_c \eta^{bc} - e^\mu{}_a e^\lambda{}_c \eta^{cb} \right) + \\ & \frac{|e|}{2k} \left[\left(\partial_\lambda e^\lambda{}_a \right) e^\mu{}_c \eta^{bc} + e^\lambda{}_a (\partial_\lambda e^\mu{}_c) \eta^{cb} - (\partial_\lambda e^\mu{}_a) e^\lambda{}_c \eta^{cb} - e^\mu{}_a (\partial_\lambda e^\lambda{}_c) \eta^{cb} \right] \end{aligned}$$

Para una conexión y una métrica generales, se puede demostrar que:

$$\partial_\lambda |e| = \partial_\lambda \sqrt{|g|} = \frac{1}{2} \sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \nabla_\lambda g_{\mu\nu} + \sqrt{|g|} \Gamma_{\lambda\rho}^\rho$$

Pero puesto que, en este trabajo, en todo momento se asume la compatibilidad de la métrica se tiene que:

$$\partial_\lambda |e| = \sqrt{|g|} \Gamma_{\lambda\rho}^\rho$$

Por tanto, finalmente resulta que el lado derecho de las ecuaciones de Euler queda:

$$\begin{aligned} & \partial_\lambda \left(\frac{\partial L_{E-H}}{\partial (\delta_\lambda \omega_\mu^a{}_b)} \right) = \\ & \frac{1}{2k} |e| \eta^{bc} \left[\Gamma_{\lambda\mu}^\mu \left(e^\mu{}_c e^\lambda{}_a - e^\mu{}_a e^\lambda{}_c \right) + \partial_\lambda e^\lambda{}_a e^\mu{}_c + (\partial_\lambda e^\mu{}_c) e^\lambda{}_a - (\partial_\lambda e^\mu{}_a) e^\lambda{}_c - (\partial_\lambda e^\lambda{}_c) e^\mu{}_a \right] \end{aligned}$$

Las ecuaciones de Euler resultantes son:

$$\begin{aligned} & e^\nu{}_a e^\gamma{}_c \eta^{cf} \omega_\gamma^b{}_f + e^\nu{}_d e^\mu{}_c \eta^{cb} \omega_\nu^d{}_a - e^\nu{}_a e^\mu{}_c \eta^{cf} \omega_\nu^d{}_a - e^\mu{}_d e^\gamma{}_c \eta^{bc} \omega_\gamma^d{}_a = \\ & \eta^{bc} \left[\Gamma_{\lambda\mu}^\mu \left(e^\mu{}_c e^\lambda{}_a - e^\mu{}_a e^\lambda{}_c \right) + (\partial_\lambda e^\lambda{}_a) e^\mu{}_c + (\partial_\lambda e^\mu{}_c) e^\lambda{}_a - (\partial_\lambda e^\mu{}_a) e^\lambda{}_c - (\partial_\lambda e^\lambda{}_c) e^\mu{}_a \right] \end{aligned}$$

Puesto que μ, a, b son los tres únicos índices que no deberían contraídos, comprobarlo es una buena forma de comprobar la validez de las expresiones obtenidas. el siguiente paso es notar como, salvo dos términos η^{cb} es un factor común. Sin embargo, estos dos términos puede reinterpretarse utilizando un par de condiciones:

- Compatibilidad de la métrica:

$$0 = D_\lambda(g_{\mu\nu}) = D_\lambda(e^a{}_\mu e^b{}_\nu \eta_{ab}) = D_\lambda(e^a{}_\mu e^b{}_\nu) \eta_{ab} + e^a{}_\mu e^b{}_\nu D_\lambda(\eta_{ab})$$

- Postulado de los Vielbein (PV)

$$D_\lambda(e^\mu{}_a) = 0$$

y como

$$D_\lambda(Id) = D_\lambda(e^\mu{}_a e^a{}_\mu) = D_\lambda(e^\mu{}_a) e^a{}_\mu + e^\mu{}_a D_\lambda(e^a{}_\mu) = 0$$

se tiene:

$$D_\lambda(e^a{}_\mu) = 0$$

Además,

$$0 = D_\lambda(e^\mu{}_a) = \partial_\lambda e^\mu{}_a + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu e^\nu{}_a - \omega_\lambda{}^b{}_a e^\mu{}_b$$

y finalmente se obtiene,

$$\Gamma_{\lambda\nu}^\mu = e^a{}_\nu \left(-\partial_\lambda e^\mu{}_a + \omega_\lambda{}^b{}_a e^\mu{}_b \right)$$

- Utilizando los resultados del item anterior:

$$0 = D_\lambda(\eta_{ab}) = -\omega_\lambda{}^c{}_a \eta_{cb} - \omega_\lambda{}^c{}_b \eta_{ac} + \partial_\lambda \eta_{ab} = 0$$

Y como η_{ab} es una constante, se deduce:

$$\omega_{\lambda ba} = -\omega_{\lambda ab}$$

Equivalentemente,

$$\omega_\lambda{}^{ba} = -\omega_\lambda{}^{ab}$$

- Adicionalmente,

$$\omega_\mu{}^c{}_c = \omega_{\mu ab} \eta^{ab} = -\omega_{\mu ba} \eta^{ba} = -\omega_{\mu ab} \eta^{ab}$$

donde simplemente se han renombrado los índices a y b en la última igualdad. Como consecuencia:

$$\omega_{\mu ab} \eta^{ab} = \omega_\mu{}^c{}_c = 0$$

Con estas condiciones, los términos sin η^{cb} se pueden expresar en función de la misma:

- $e^\mu{}_a e^\gamma{}_c \eta^{cf} \omega_\gamma{}^b{}_f = e^\mu{}_a e^\gamma{}_c \omega_\gamma{}^{bc} = -e^\mu{}_a e^\gamma{}_c \omega_\gamma{}^{cb} = -e^\mu{}_a e^\gamma{}_d \omega_\gamma{}^d{}_c \eta^{bc}$
- $e^\nu{}_a e^\mu{}_c \eta^{cf} \omega_\nu{}^b{}_f = e^\nu{}_a e^\mu{}_c \omega_\nu{}^{bc} = -e^\nu{}_a e^\mu{}_c \omega_\nu{}^{cb} = -e^\nu{}_a e^\mu{}_d \omega_\nu{}^d{}_c \eta^{bc}$

En este punto, las ecuaciones de Euler resultan ser:

$$\begin{aligned} & -e^\mu{}_a e^\gamma{}_d \omega_\gamma{}^d{}_c \eta^{bc} + e^\nu{}_d e^\mu{}_c \eta^{cb} \omega_\nu{}^d{}_a + e^\nu{}_a e^\mu{}_d \omega_\nu{}^d{}_c \eta^{bc} - e^\mu{}_d e^\gamma{}_c \eta^{bc} \omega_\gamma{}^d{}_a = \\ & \eta^{bc} \left[\Gamma_{\lambda\mu}^\mu \left(e^\mu{}_c e^\lambda{}_a - e^\mu{}_a e^\lambda{}_c \right) + (\partial_\lambda e^\lambda{}_a) e^\mu{}_c + (\partial_\lambda e^\mu{}_c) e^\lambda{}_a - (\partial_\lambda e^\mu{}_a) e^\lambda{}_c - (\partial_\lambda e^\lambda{}_c) e^\mu{}_a \right] \end{aligned}$$

Esta expresión se puede simplificar notablemente en términos de la conexión. Reagrupando:

1. $-(\partial_\lambda e^\lambda{}_c) e^\mu{}_a \eta^{cb} + e^\nu{}_d e^\mu{}_a \omega_\nu{}^d{}_c \eta^{cb} = e^\mu{}_a \eta^{cb} (\partial_\lambda e^\lambda{}_c - e^\lambda{}_d \omega_\lambda{}^d{}_c) = e^\mu{}_a \eta^{cb} (e^\nu{}_c \Gamma_{\lambda\nu}^\lambda)$
2. $-(\partial_\lambda e^\mu{}_a) e^\lambda{}_c \eta^{cb} + e^\nu{}_c e^\mu{}_d \omega_\nu{}^d{}_a \eta^{cb} = e^\lambda{}_c \eta^{cb} (-\partial_\lambda e^\mu{}_a + e^\mu{}_d \omega_\lambda{}^d{}_a) = e^\lambda{}_c \eta^{cb} (e^\nu{}_a \Gamma_{\lambda\nu}^\mu)$
3. $(\partial_\lambda e^\mu{}_c) e^\lambda{}_a \eta^{cb} - e^\mu{}_d e^\gamma{}_a \omega_\gamma{}^d{}_c \eta^{cb} = e^\lambda{}_a \eta^{cb} (\partial_\lambda e^\mu{}_c - e^\mu{}_d \omega_\lambda{}^d{}_c) = e^\lambda{}_a \eta^{cb} (-e^\nu{}_c \Gamma_{\lambda\nu}^\mu)$

$$4. (\partial_\lambda e^\lambda_a) e^\mu_c \eta^{cb} - e^\mu_c e^\gamma_d \omega_\gamma^d{}_a \eta^{cb} = e^\mu_c \eta^{cb} (\partial_\lambda e^\lambda_a e^\lambda_d \omega_\lambda^d{}_a) = e^\mu_c \eta^{cb} (-e^\nu_a \Gamma^\lambda_{\lambda\nu})$$

Usando el tensor de torsión ($T^\mu_{\lambda\nu} = \Gamma^\mu_{\lambda\nu} - \Gamma^\mu_{\nu\lambda}$), y renombrando los índices contraídos, se llega a la expresión final:

$$0 = \eta^{bc} \left[e^\mu_c e^\nu_a (\Gamma^\tau_{\nu\tau} - \Gamma^\tau_{\tau\nu}) + e^\nu_c e^\lambda_a (\Gamma^\mu_{\lambda\nu} - \Gamma^\mu_{\nu\lambda}) - e^\mu_a e^\nu_c (\Gamma^\tau_{\nu\tau} - \Gamma^\tau_{\tau\nu}) \right] =$$

$$\eta^{bc} \left[e^\mu_c e^\nu_a T^\tau_{\nu\tau} + e^\nu_c e^\lambda_a T^\mu_{\lambda\nu} - e^\mu_a e^\nu_c T^\tau_{\nu\tau} \right]$$

Y como η^{bc} es una constante:

$$0 = e^\mu_c e^\nu_a T^\tau_{\nu\tau} + e^\nu_c e^\lambda_a T^\mu_{\lambda\nu} - e^\mu_a e^\nu_c T^\tau_{\nu\tau}$$

Análogamente a lo que se hizo en el capítulo de gravedad de Einstein-Cartan, considerando la presencia de campos de materia se obtiene la ecuación de campo asociada a la conexión de espín:

$$\eta^{bc} \left[e^\mu_c e^\nu_a T^\tau_{\nu\tau} + e^\nu_c e^\lambda_a T^\mu_{\lambda\nu} - e^\mu_a e^\nu_c T^\tau_{\nu\tau} \right] = -\kappa s^\mu{}_a{}^b \quad (\text{D.1})$$

definiendo como tensor de espín,

$$s^\mu{}_a{}^b = \frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial(\sqrt{|g|} \mathcal{L}_{mat}(\chi, e, \omega))}{\partial \omega_\mu{}^a{}_b}$$

Bibliografía

- [1] R. Ferraro, *Teorías $f(T)$ de gravedad modificada*. 2011. Universidad de Buenos Aires - CONICET.
- [2] N. J. Popławski, “Cosmology with torsion: An alternative to cosmic inflation,” *Phys. Lett. B*, vol. 694, pp. 181–185, 2010.
- [3] R. A. A. B, “La Influencia de Élie Cartan sobre la Obra de Albert Einstein,” *Revista Digital: Matemática, Educación E Internet*, vol. 14(2), 2014.
- [4] F. Hehl, D. Kerlick, and J. Nester, “General relativity with spin and torsion: Foundations and prospects,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 48, 07 1976.
- [5] A. J. Cano, *Formalismo de Palatini y sus implicaciones en la teoría Einstein-Hilbert libre y acoplada*. 2016. Universidad de Granada.
- [6] B. Janssen, *Teoría de la Relatividad General*. 2013. Universidad de Granada.
- [7] A. J. L. Revelles, “Theories of modified gravity and reconstruction schemes of cosmological models,” 2013.
- [8] D. W. Ebner, “How Hilbert has found the Einstein Equations before Einstein and forgeries of Hilbert’s page proofs,” *Physics Department, University of Konstanz*, 10 2006.
- [9] J. Lafuente, “Variedades diferenciables,” *Universidad Complutense de Madrid*, 10 2014.
- [10] J. I. Illana, “Teoría Cuántica de Campos,” *Universidad de Granada*, 2019.
- [11] R. Ferraro, “Einstein’s space-time: An introduction to special and general relativity,” 01 2007.
- [12] *General Relativity Lecture 4*. <https://youtu.be/YdnLcYNdTzE> Fecha de consulta: 22/06/20. Universidad Stanford.
- [13] B. Ryden, “Introduction to Cosmology,” *The Ohio State University*, 01 2006.
- [14] A. R. Liddle, “An Introduction to cosmological inflation,” in *Proceedings, Summer School in High-energy physics and cosmology: Trieste, Italy, June 29-July 17, 1998*, pp. 260–295, 1999.
- [15] E. Bertschinger, “Symmetry Transformations, the Einstein-Hilbert Action, and Gauge Invariance,” *Massachusetts Institute of Technology*, 2002.